

2012年 商学部 第2問

2 Oを原点とする座標空間において, 4点

$$A_1(1, 1, 1), \quad B_1(-1, -1, 1), \quad C_1(1, -1, -1), \quad D_1(-1, 1, -1)$$

を考えると, 立体 $A_1B_1C_1D_1$ は正四面体である. このとき, 以下の設問に答えよ.

- (1) 正四面体 $A_1B_1C_1D_1$ を xy 平面に平行な平面 $z = -1 + h$ ($0 \leq h \leq 2$) で切ったときに出来る図形の面積を $S(h)$ とすると,

$$S(h) = -\boxed{34} h^2 + \boxed{35} h$$

と表され, $S(h)$ は $h = \boxed{36}$ のとき最大値 $\boxed{37}$ をとる. (このときの図形はペトリ-多角形と呼ばれている.) さらに,

$$V_1 = \int_0^2 S(h) dh = \frac{\boxed{38}}{\boxed{39}}$$

とおくと, V_1 は正四面体 $A_1B_1C_1D_1$ の体積となっている.

- (2) 三角形 $B_1C_1D_1$, 三角形 $C_1D_1A_1$, 三角形 $D_1A_1B_1$, 三角形 $A_1B_1C_1$ の重心をそれぞれ A_2, B_2, C_2, D_2 とする. このとき, 立体 $A_2B_2C_2D_2$ は再び, 正四面体となる. (このことを, 正四面体は自己双対であるという.) 同様に, n を自然数として, 三角形 $B_nC_nD_n$, 三角形 $C_nD_nA_n$, 三角形 $D_nA_nB_n$, 三角形 $A_nB_nC_n$ の重心をそれぞれ $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ とする. このとき,

$$\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \cdots + \vec{OA}_n = \frac{\boxed{40}}{\boxed{41}} \left\{ 1 - \left(-\frac{\boxed{42}}{\boxed{43}} \right)^n \right\} \vec{OA}_1$$

である. また, 正四面体 $A_nB_nC_nD_n$ の表面積 S_n と体積 V_n は, それぞれ,

$$S_n = \boxed{44} \cdot \boxed{45} - \boxed{46} n + \frac{\boxed{47}}{2}, \quad V_n = \boxed{48} \cdot \boxed{49} - \boxed{50} n + \boxed{51}$$

である.