2015年 経済学部 第3問

$\boxed{3}$ 実数 $\theta$ は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．O(0, 0, 0) を原点とする座標空間の3点

$$\mathrm{A}(\cos^2\theta,\ \sin\theta,\ 1+\sin^2\theta),\quad \mathrm{B}(\sin\theta,\ 0,\ -\sin\theta),\quad \mathrm{C}(1,\ \cos 2\theta-\cos^2\theta,\ 1)$$

に対し，それぞれ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

(1) $\vec{b}$ は零ベクトルではないとする．4点O，A，B，Cが同一平面上にあるならば，

$$\theta=\frac{\boxed{27}\boxed{28}}{\boxed{29}}\pi$$ である．

次に $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とし，以下このときの3点A，B，Cを考える．また，3点O，B，Cの定める平面を $\alpha$ とする．

(2) 点Pは $\alpha$ 上の点で，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ が最小になるものとする．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{b}=\boxed{30},\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{c}=\boxed{31}$$

が成り立つ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{32}\boxed{33}}{\boxed{34}}\vec{b}+\frac{\boxed{35}\boxed{36}}{\boxed{37}\boxed{38}}\vec{c}$$

となる．ただし，$\vec{u}\cdot\vec{v}$ はベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を表す．

(3) 三角形OBCの面積は $\dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{\boxed{39}\boxed{40}}{\boxed{41}}}$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{\dfrac{\boxed{42}}{\boxed{43}\boxed{44}}}$ なので，四面体OABCの体積は $\dfrac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$ となる．