2014年 理工学部 第5問

$\boxed{5}$ 以下の $\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$ には三角関数は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ のみを用いて記入し，$\boxed{\text{ヌ}}$ には x の式，$\boxed{\text{ネ}}$ には y の式を記入すること．

座標平面上の2点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を結ぶ曲線 C が媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = g(\theta) \end{cases} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されているとする．いま，関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で連続，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で微分可能かつ $f'(\theta) \fallingdotseq 0$ であるとする．また $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，点 $(f(\theta),\ g(\theta))$ における曲線 C の接線の傾きが $-\tan\theta$ であり，この接線から x 軸，y 軸で切り取られる線分の長さがつねに一定で1であるとする．
まず，この曲線 C の方程式を求めたい．$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，曲線 C 上の点 $(f(\theta),\ g(\theta))$ における接線を $y = -(\tan\theta)x + h(\theta)$ と表すと $h(\theta) = \boxed{\text{ト}}$ となる．この接線の傾きが $\dfrac{g'(\theta)}{f'(\theta)}$ となることより，$f(\theta) = \boxed{\text{ナ}}$，$g(\theta) = \boxed{\text{ニ}}$ となる．したがって，曲線 C を x，y の方程式で表すと

$$\boxed{\text{ヌ}} + \boxed{\text{ネ}} = 1 \quad (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

となる．
次に，点 $(f(\theta),\ g(\theta))$ における曲線 C の法線を $\ell(\theta)$ とする．$\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{4}$ のとき $\ell(\theta)$ と $\ell\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ との交点の x 座標を $X(\theta)$ とすると，$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} X(\theta) = \boxed{\text{ノ}}$ となる．
また，曲線 C と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{ハ}}$ である．