0001877452218999

関西学院大学

2012年 理系学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 実数x, yが$x^2+y^2-4y+2=0$を満たすとする．$k=\dfrac{x}{y}$, $z=\dfrac{x^2+4xy+9y^2}{xy+2y^2}$とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) kのとりうる値の範囲を求めよ．

(2) zをkの式で表せ．

(3) zの最小値とそのときのkの値を求めよ．

(4) zの最小値を与えるxの値は2つある．それらをα, βとするとき，$\alpha+\beta$を求めよ．

(1) $k=\dfrac{x}{y}$より．$x=ky$　これを　$x^2+y^2-4y+2=0$ に代入して．

$$k^2y^2+y^2-4y+2=0$$

$\therefore (k^2+1)y^2-4y+2=0$ の判別式をDとおくと．

$$\frac{D}{4}=4-(k^2+1)\cdot 2$$
$$=-2k^2+2$$

$\therefore -2(k-1)(k+1)\geqq 0$　　$\therefore$ $\underline{-1\leqq k\leqq 1}$ //

(2) zの式の分子・分母を$y^2\ (\neq 0)$で割ると．（$y=0$と仮定すると．$x^2+2=0$となるので xが実数であることに反する $\therefore y\neq 0$）

$$z=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{4x}{y}+9}{\frac{x}{y}+2}=\underline{\frac{k^2+4k+9}{k+2}}$$ //

(3) (2)より．$z=\dfrac{(k+2)^2+5}{k+2}=k+2+\dfrac{5}{k+2}$

(1)より．$k+2>0$であり．相加・相乗平均の関係より．

$$k+2+\frac{5}{k+2}\geqq 2\sqrt{(k+2)\cdot\frac{5}{k+2}}$$
$$=2\sqrt{5}$$
（等号成立は．$k+2=\dfrac{5}{k+2}$ すなわち．$k=\sqrt{5}-2$のとき）

以上より．$\underline{z\text{の最小値は}2\sqrt{5}\ (k=\sqrt{5}-2\text{のとき})}$ //

(4) $k=\sqrt{5}-2$より．$y=\dfrac{x}{\sqrt{5}-2}$　有理化して．$y=(\sqrt{5}+2)x$　これを

$x^2+y^2-4y+2=0$ に代入して．$(10+4\sqrt{5})x^2-4(\sqrt{5}+2)x+2=0$

解と係数の関係より．$\alpha+\beta=\dfrac{4(\sqrt{5}+2)}{2(5+2\sqrt{5})}=\dfrac{2(\sqrt{5}+2)(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}=\underline{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$ //