2012年 文系2 第2問

数理 石井K

2 次の $\boxed{}$ を数値でうめよ．

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n と表すとき，すべての自然数 n について

$$3S_n = a_n + 7\cdot 3^n - 6$$

が成立するとする．このとき，$a_1 = \overset{\frac{15}{2}}{\boxed{①}}$ であり，すべての自然数 n について

$$a_{n+1} = \overset{-\frac{1}{2}}{\boxed{②}}\, a_n + \overset{7}{\boxed{③}}\cdot 3^n$$

が成立する．いま，$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，

$$b_n = \overset{\frac{1}{2}}{\boxed{④}}\cdot\left(\overset{-\frac{1}{6}}{\boxed{⑤}}\right)^{n-1} + \overset{2}{\boxed{⑥}}$$

と表される．したがって，a_n が得られる．

$S_1 = a_1$ であるから，$3S_n = a_n + 7\cdot 3^n - 6$ に $n=1$ を代入すると，

$3a_1 = a_1 + 7\cdot 3 - 6$　　$\therefore\ 2a_1 = 15$　　$\therefore\ \underline{a_1 = \dfrac{15}{2}}$ //

$3S_n = a_n + 7\cdot 3^n - 6 \cdots ①$ より，

$3S_{n+1} = a_{n+1} + 7\cdot 3^{n+1} - 6 \cdots ②$

②−① より，$3(S_{n+1} - S_n) = a_{n+1} - a_n + 7\cdot 3^{n+1} - 7\cdot 3^n$

ここで，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$，$7\cdot 3^{n+1} - 7\cdot 3^n = 7\cdot 3^n\cdot(3-1) = 14\cdot 3^n$ であるから．

$3a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 14\cdot 3^n$

$\therefore\ \underline{a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 7\cdot 3^n}$ //

両辺を 3^{n+1} で割って，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n}{3^{n+1}} + \dfrac{7}{3}$

$\therefore\ \dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = -\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{a_n}{3^n} + \dfrac{7}{3}$

$\therefore\ b_{n+1} = -\dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{7}{3}$

$\therefore\ b_{n+1} - 2 = -\dfrac{1}{6}(b_n - 2)$　　∴ 数列 $\{b_n - 2\}$ は初項 $b_1 - 2 = \dfrac{a_1}{3^1} - 2 = \dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{6}$ の

等比数列であるから，$b_n - 2 = \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$　　$\therefore\ \underline{b_n = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} + 2}$ //