

2015年理系2第1問

1 関数 $f(x) = \sqrt{7x-3} - 1$ について考える.

(1) $f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x) = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} x^2 + \text{ウ} x + \text{エ}$ ($x \geq \text{オカ}$) である.

(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ との交点の座標は $(\text{キ}, \text{ク})$, $(\text{ケ}, \text{コ})$ である. ただし, $\text{キ} < \text{ケ}$ とする.

(3) 不等式 $f^{-1}(x) \leq f(x)$ の解は $\text{サ} \leq x \leq \text{シ}$ である.

(1) $y = \sqrt{7x-3} - 1$ ($x \geq \frac{3}{7}$) とし, x と y を入れかえて,

根号内が0以上より,

$$x = \sqrt{7y-3} - 1 \quad (y \geq \frac{3}{7})$$

$$\therefore x+1 = \sqrt{7y-3} \quad (x \geq -1)$$

$$\therefore (x+1)^2 = 7y-3 \quad (x \geq -1)$$

$$\therefore y = f^{-1}(x) = \frac{1}{7}(x^2 + 2x + 4) \quad (x \geq -1)$$

(2) $\sqrt{7x-3} - 1 = x$

$$\therefore \sqrt{7x-3} = x+1 \quad \dots (*)$$

左辺は0以上なので $x+1 \geq 0 \therefore x \geq -1$

これと $x \geq \frac{3}{7}$ より, $x \geq \frac{3}{7} \dots \textcircled{1}$

(*) の両辺2乗して, $7x-3 = x^2 + 2x + 1$

$$\therefore x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\therefore (x-1)(x-4) = 0 \quad \textcircled{1} \text{より } x=1, 4 \quad \therefore \underline{(1, 1), (4, 4)}$$

(3) $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ は $y = x$ に関して対称なので

右図より,

$$\underline{1 \leq x \leq 4}$$

