

2014年理系2第1問



1 次の関数を考える.

$$f_1(x) = x, f_2(x) = x + 1, f_3(x) = x - 1, f_4(x) = x^2 - 1 \quad (x \leq 0),$$

$$f_5(x) = \frac{1}{1-x}, f_6(x) = \frac{x}{1-x}, f_7(x) = \frac{x}{x+1}, f_8(x) = \sqrt{x+1},$$

$$f_9(x) = -\sqrt{x+1}$$

(1) $f_4^{-1}(x) = f_{\boxed{9}}(x)$ であり, $f_6^{-1}(x) = f_{\boxed{7}}(x)$ である.

(2) $(f_2 \circ f_3)(x) = f_{\boxed{1}}(x)$, $(f_3 \circ f_5)(x) = f_{\boxed{6}}(x)$ であり,
 $(f_2 \circ f_{\boxed{6}})(x) = f_{\boxed{5}}(x)$ である.

(3) 合成関数 $y = (f_6 \circ f_9)(x)$ の定義域は $x \geq \boxed{-1}$ であり, 値域は $\boxed{-1} < y \leq \boxed{0}$ である.

$$(1) f_4(x) = x^2 - 1 \text{ より } x = y^2 - 1 \quad \therefore y = -\sqrt{x+1} \quad (\because y \leq 0 \text{ より}) \quad \therefore \underline{f_4^{-1}(x) = f_9(x)}$$

$$f_6(x) = \frac{x}{1-x} \text{ より } x = \frac{y}{1-y} \quad \therefore x - xy = y \quad y = \frac{x}{1+x} \quad \therefore \underline{f_6^{-1}(x) = f_7(x)}$$

(2) $(f_2 \circ f_3)(x) = (x-1) + 1 = x = \underline{f_1(x)}$

$(f_3 \circ f_5)(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} = \underline{f_6(x)}$

$(f_2 \circ f_6)(x) = \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{1}{1-x} = \underline{f_5(x)}$

(3) $f_6(x)$ の定義域は $x \neq 1$,

$f_9(x)$ の定義域は $x \geq -1$

また, $f_9(x) = 1$ となる ~~ことはない~~ ことはない \therefore 定義域は $\underline{x \geq -1}$

$$(f_6 \circ f_9)(x) = \frac{-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{-(1+\sqrt{x+1})+1}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} - 1$$

$\therefore (f_6 \circ f_9)(x)$ は $x \geq -1$ で単調減少.

\therefore 値域は $\underline{-1 < y \leq 0}$