2013 年 理系 2 第 2 問　1枚目／2枚

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 角度 θ が $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であって $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{5}$ を満たすとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n\theta = \frac{\boxed{シ}\ 3}{\boxed{ス}\ 2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos^n\theta = \frac{\boxed{セ}\boxed{ソ}\ -4}{\boxed{タ}\ 9}$$

である．

(2) 初項 7，公差 9 の等差数列 $\{a_n\}$ について，

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とすると，$S_n = \frac{1}{\boxed{チ}}\left(\frac{1}{\boxed{ツ}} - \frac{1}{\boxed{テ}\,n + \boxed{ト}}\right)$ であって，$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\boxed{ナ}\boxed{ニ}}$ である．

9　7　9　7　6　3

(1) $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{5}$ より

$\sin\theta = -\frac{1}{5} - \cos\theta$

両辺を 2 乗して．$\sin^2\theta = \frac{1}{25} + \frac{2}{5}\cos\theta + \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を代入して整理すると．

$2\cos^2\theta + \frac{2}{5}\cos\theta - \frac{24}{25} = 0$

$\therefore \cos^2\theta + \frac{1}{5}\cos\theta - \frac{12}{25} = 0$

$\therefore \left(\cos\theta - \frac{3}{5}\right)\left(\cos\theta + \frac{4}{5}\right) = 0$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より．$\cos\theta < 0$ なので．$\cos\theta = -\frac{4}{5}$　このとき $\sin\theta = \frac{3}{5}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n\theta = \sin\theta + (\sin\theta)^2 + (\sin\theta)^3 + \cdots$　← 公比 $\sin\theta$ の無限等比級数

$-1 < \sin\theta < 1$ より収束する．

$= \frac{\sin\theta}{1 - \sin\theta}$

$= \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}}$

$= \frac{3}{2}$ //

同様にして，$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n\theta = -\frac{4}{9}$ //

0001668451338999

金沢工業大学

2013年 理系2 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 角度 θ が $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であって $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{5}$ を満たすとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \theta = \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos^n \theta = \frac{\boxed{セ}\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$$

である．

(2) 初項7，公差9の等差数列 $\{a_n\}$ について，

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とすると，$S_n = \frac{1}{\boxed{チ}}\left(\frac{1}{\boxed{ツ}} - \frac{1}{\boxed{テ}n + \boxed{ト}}\right)$ であって，$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\boxed{ナ}\boxed{ニ}}$ である．

(2) $a_n = 7 + 9\cdot(n-1)$

$= 9n - 2$

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(9k-2)(9k+7)}$

部分分数に分解.

$= \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{9k-2} - \frac{1}{9k+7}\right)$

$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{7} - \cancel{\frac{1}{16}} + \cancel{\frac{1}{16}} - \cancel{\frac{1}{25}} + \cancel{\frac{1}{25}} - \cancel{\frac{1}{34}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{9n-2}} - \frac{1}{9n+7}\right)$

$= \underline{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9n+7}\right)}$ //

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{7} - \underbrace{\frac{1}{9n+7}}_{\to 0}\right)$

$= \underline{\frac{1}{63}}$ //