山形大学

2015年 理学部（物理） 第2問

$\boxed{2}$ $y = \cos\dfrac{\pi x}{2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ で与えられる曲線を C とする．曲線 C と x 軸，y 軸で囲まれた図形 S について，以下の問いに答えよ．

(1) 図形 S の面積を求めよ．

(2) 図形 S を x 軸のまわりに1回転させて得られる立体の体積を求めよ．

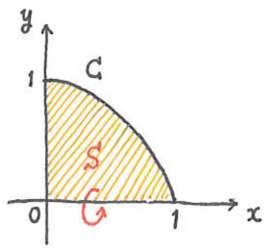
(3) 部分積分法を用いて次の不定積分を求めよ．

$$\int x^2 \sin x\, dx$$

(4) 図形 S を y 軸のまわりに1回転させて得られる立体の体積を求めよ．その際，曲線 C は変数 t を媒介変数として

$$x = \frac{2}{\pi}t, \quad y = \cos t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表せることを利用せよ．



(1) $S = \int_0^1 \cos\dfrac{\pi x}{2}\, dx$

$= \left[\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi x}{2}\right]_0^1$

$= \underline{\dfrac{2}{\pi}}$ //

(2) $V_x = \pi\int_0^1 \cos^2\dfrac{\pi x}{2}\, dx = \pi\int_0^1 \dfrac{1}{2}(1+\cos\pi x)\, dx = \dfrac{\pi}{2}\left[x + \dfrac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1 = \underline{\dfrac{\pi}{2}}$ //

(3) $I = \int x^2(-\cos x)'\, dx$

$= -x^2\cos x + \int 2x\cos x\, dx$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\, dx$

$= \underline{(2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C}$ // （Cは積分定数）

(4) $V_y = \pi\int_0^1 x^2\, dy$

$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \dfrac{4}{\pi^2}t^2 \cdot \dfrac{dy}{dt}\cdot dt$

$= \dfrac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 t^2\cdot(-\sin t)\, dt$

$= \dfrac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t\, dt$

(3)より，$V_y = \dfrac{4}{\pi}\left[(2-t^2)\cos t + 2t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{4}{\pi}\left\{\left(2-\dfrac{\pi^2}{4}\right)\cdot 0 + \pi - 2\right\}$

$= 4 - \dfrac{8}{\pi}$

$= \underline{4\left(1-\dfrac{2}{\pi}\right)}$ //