金沢大学

2014年 理系 第4問

数理 石井K

4 自然数が1つずつ書かれている玉が，

① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④ ① ② ③ ④ ⑤ ① ② ……

のように1列に並べられている．次の問いに答えよ．

(1) 数100が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か．

(2) 自然数 n に対し，$2n^2$ 番目の玉に書かれている数は何か．

(3) 1番目から $2n^2$ 番目までの玉をすべて袋に入れた．この袋から2つの玉を取り出すとき，同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ．

(1) 上のように群に分けると第 k 群（k：正の整数）には k 個の玉がある．

また，第 k 群の最後の玉の数字は k である．

∴ 100は第100群の最後に出てくるのが最初に現れるときであるから

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 101 = \underline{5050\text{番目}}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{2n-1} k = \frac{1}{2}\cdot(2n-1)(2n) = 2n^2-n \quad \text{より．}$$

数字 $2n^2$ は第 $2n$ 群の最初から n 番目の数 ∴ $\underline{n}$

(3) 1は $2n$ コ，2は $(2n-1)$ コ，3は $(2n-2)$ コ，…，n は $(n+1)$ コ，

$n+1$ は $(n-1)$ コ，$n+2$ は $(n-2)$ コ，…，$2n-1$ は 1コ 袋に入っている．

∴ $k\ (1 \leqq k \leqq n)$ を2つ取り出す確率は，$\dfrac{{}_{2n+1-k}C_2}{{}_{2n^2}C_2} = \dfrac{(2n+1-k)(2n-k)}{2n^2(2n^2-1)}$

$k\ (n+1 \leqq k \leqq 2n-1)$ を2つ取り出す確率は，

$$\frac{{}_{2n-k}C_2}{{}_{2n^2}C_2} = \frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2n^2(2n^2-1)}$$

求める確率は，$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1-k)(2n-k)}{2n^2(2n^2-1)} + \sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2n^2(2n^2-1)}$$

$$= \frac{1}{2n^2(2n^2-1)}\sum_{k=1}^{n} 2k^2-6nk+5n^2+n = \frac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}$$