金沢大学

2016年 理系 第2問

$\boxed{2}$ 曲線 $C: x^2+4y^2=4$ 上を動く点Pと，C 上の定点Q(2, 0)，R(0, 1)がある．次の問いに答えよ．

(1) △PQRの面積の最大値と，そのときのPの座標を求めよ．

(2) (1)で求めた点Pに対して直線PQを考える．曲線 C によって囲まれた図形を直線PQで2つに分けたとき，直線PQの下方にある部分の面積を求めよ．

(1) $P(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおいて，P, Q, R を y 軸方向に −1 だけ平行移動した点をそれぞれ P′, Q′, R′ とすると，$P'(2\cos\theta,\ \sin\theta-1)$, $Q'(2,\ -1)$, $R'(0,\ 0)$ となる.

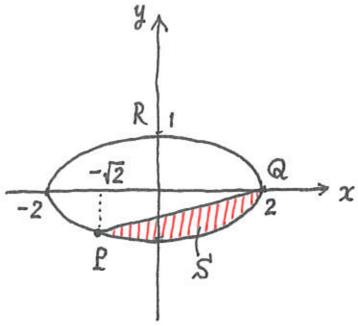
$$
\begin{aligned}
\triangle PQR &= \triangle P'Q'R' \\
&= \frac{1}{2}\left|2(\sin\theta-1)+2\cos\theta\right| \\
&= \left|\sin\theta+\cos\theta-1\right| \\
&= \left|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1\right|
\end{aligned}
$$

∴ △PQRの面積は $\theta=\frac{5}{4}\pi$ のとき，最大値 $\sqrt{2}+1$ をとる．このとき，$P\left(-\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

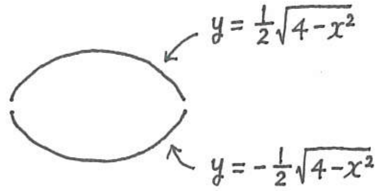
(2) 直線PQの方程式は．

$$y=\frac{0-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2-(-\sqrt{2})}\cdot(x-2)$$

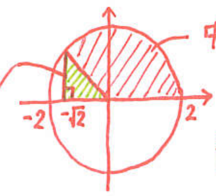
$$\therefore\ y=\frac{\sqrt{2}-1}{2}(x-2)$$



$$
\begin{aligned}
\therefore\ S &= \int_{-\sqrt{2}}^{2} \frac{\sqrt{2}-1}{2}(x-2)-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right)dx \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{2} x-2\ dx+\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{2}\sqrt{4-x^2}\ dx \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-\sqrt{2}}^{2}+\frac{1}{2}\left(\pi\cdot 2^2\cdot\frac{3}{8}+1\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(2-4-1-2\sqrt{2}\right)+\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$



$y=\sqrt{4-x^2}$ より．$x^2+y^2=4$ $(y \geqq 0)$



中心角 $\frac{3\pi}{4}$ のおうぎ形の面積に等しい

直角二等辺三角形 $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$