横浜市立大学

2013年 国際総合学部 第2問

$\boxed{2}$ n 個のボールと，1 から n までの番号がふられた n 個の空の箱がある．また，1 から n の番号が書かれた n 枚のカードが袋の中に入っている．いま，以下の手順に従いボールを箱の中に入れていくことを考える．

手順1　袋からカードを1枚無作為に取り出して，手順2に進む．

手順2　手順1で取り出したカードに書かれている番号の箱が，

- 空ならば，そこにボールを1つ入れて，手順3へ進む．
- 空でなければ，カードを袋に戻さず手元に置き，手順1に戻る．

手順3　手元のすべてのカードを袋に戻す．この時点で，

- すべての箱にボールが入っていれば終了する．
- 空の箱が1つでもあれば，手順1に戻る．

また，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，$k-1$ 個目のボールを箱に入れ終わった状態（ただし，$k=1$ のときは，はじめの状態とする）の後に，

- 次のボール，すなわち k 個目のボールを箱に入れるまでにちょうど i 枚のカードを袋から取り出す確率を $P_k(i)$ とし，
- i 枚のカードを袋から取り出してもまだ次のボールを箱に入れることができない確率を $Q_k(i)$ とする．ただし，$Q_k(0)=1$ とする．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n=4$ のとき $P_3(1)$，$P_3(2)$，$Q_3(2)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $Q_k(i)$ を $P_k(i+1)$，$P_k(i+2)$，$\cdots$，$P_k(k)$ を用いて表せ．ただし，$0 \leqq i \leqq k-1$ とする．

(3) $k-1$ 個目のボールを箱に入れてから k 個目のボールを箱に入れるまでに袋から取り出すカードの枚数の期待値 E_k は $Q_k(0)+Q_k(1)+\cdots+Q_k(k-1)$ であることを示せ．

(4) 不等式

$$E_k \leqq \frac{n}{n-k+1}$$

が成り立つことを示せ．

(5) 不等式

$$E_1+E_2+\cdots+E_n \leqq n+n\log n$$

が成り立つことを示せ．