2015年 理学部（物理） 第1問

$\boxed{1}$ 二つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = \frac{1}{2}(x-a)^2 + b$$

がある．ただし，$a$，$b$ は実数であり，$b > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 $C_1$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線 $\ell$ の方程式を求めよ．

(2) 接線 $\ell$ が $C_2$ にも接する場合の $p$ を $a$ と $b$ を用いて表せ．

(3) (2) より $C_1$，$C_2$ の両方に接する直線が 2 本存在することがわかる．この二つの直線の交点 Q の座標を $a$ と $b$ を用いて表せ．

(4) 放物線 $C_2$ の頂点が曲線 $y = e^{-2x^2}$ 上を動くとき，交点 Q の軌跡を $y = f(x)$ で表す．関数 $f(x)$ を求めよ．また $f(x)$ の増減と凹凸を調べ軌跡の概形をかけ．