

## 早稲田大学

2013年 政治経済学部 第2問

2 次の各問に答えよ。(2)は空欄にあてはまる数または式を記入せよ。

(1) 数列  $\{a_n\}$  が

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で与えられている。このとき、和  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  を求めよ。また、 $S_n$  は

$$S_n - S_{n-1} = (1 - 2S_{n-1})(1 - 2S_n) \quad (n=2, 3, \dots)$$

を満たすことを示せ。

(2) 数列  $\{b_n\}$  の和  $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$  が

$$(*) \quad T_n - T_{n-1} = (1 - 2T_{n-1})(1 - 2T_n) \quad (n=2, 3, \dots)$$

を満たしている。もし、 $T_1 = \frac{1}{2}$  ならば、(\*)で  $n=2$  ととれば、 $T_2 = T_1 = \frac{1}{2}$  となる。同様に、(\*)で  $n=3, 4, \dots$  ととれば、 $T_n = \frac{1}{2}$  ( $n=3, 4, \dots$ ) となる。

いま、 $T_n \neq \frac{1}{2}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) とする。このとき、 $U_n = 1 - 2T_n$  とおくと、 $U_n$  は漸化式  を満たす。よって、 $\frac{1}{U_1} = c$  ( $\neq 0$ ) とおけば、 $U_n$  は  $n$  と  $c$  を用いて、 $U_n =$   と表せる。これより、 $b_1 =$  ,  $b_n =$   が得られ、 $b_n$  が(1)の  $a_n$  と一致するのは  $c =$   のときである。