0000370279269999

富山大学

2012 年 医学部 第 3 問

$\boxed{3}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}$ は次の条件 (ア), (イ) を満たしているとする.

(ア) $A^2+A+E=O$

(イ) $B^2=E$

ただし, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(1) x, y, z, w がすべて整数で $x<yw$ を満たすとき, x, y, z, w を求めよ.

(2) (1) で求めた x, y, z, w に対して, ベクトル $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める.

- $\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ が決まったとき, 硬貨を投げて表が出れば $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, 裏が出れば $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ とする.

(a) $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ のいずれかであることを示せ.

(b) $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる確率を X_n, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる確率を Y_n, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる確率を Z_n とするとき, X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1} をそれぞれ Y_n を用いて表せ. また, X_n を n を用いて表せ.