2015年 医学部 第2問　1枚目／2枚

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = 2\sqrt{2}, \\ a_n > 0, \quad a_1{}^{\frac{1}{n}} a_2{}^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}{}^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{2}{n}} = 8 \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $c_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $10^k \leqq c_{11} < 10^{k+1}$ となる整数 k を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1) $a_n > 0$ より，$a_1{}^{\frac{1}{n}} a_2{}^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}{}^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{2}{n}} = 8$ の両辺，底が2の対数をとって，

$$\frac{1}{n}\log_2 a_1 + \frac{1}{n}\log_2 a_2 + \cdots + \frac{1}{n}\log_2 a_{n-1} + \frac{2}{n}\log_2 a_n = 3$$

$$\therefore \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 2b_n) = 3$$

$$\therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 2b_n = 3n \quad \cdots ①$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n + 2b_{n+1} = 3(n+1) \quad \cdots ②$$

②−①より，$2b_{n+1} - b_n = 3 \quad (n \geqq 2)$

$$\therefore b_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(b_n - 3)$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n - 3\}$ は第2項が $b_2 - 3 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$，

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列 $\therefore b_n - 3 = -\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = -3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \underline{b_n = 3\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$ //　これは $n=1$ のときも成り立つ

$a_1 = 2^{\frac{3}{2}}$ より，$b_1 = \frac{3}{2}$

$n=2$ を代入して，

$a_1{}^{\frac{1}{2}} \cdot a_2{}^{1} = 8$

$\therefore \sqrt[4]{8} \cdot a_2 = 8$

$\therefore a_2 = 8^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{9}{4}}$

$\therefore b_2 = \frac{9}{4}$

(2) $c_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ の両辺，底が2の対数をとって，

$$\begin{aligned} \log_2 c_n &= \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n \\ &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} 3\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} \\ &= 3n - 3\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3\left\{n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

$\therefore \underline{c_n = 2^{3\left\{n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}}$ //

2015年 医学部 第2問　　2枚目/2枚

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = 2\sqrt{2}, \\ a_n > 0, \quad a_1{}^{\frac{1}{n}} a_2{}^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}{}^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{2}{n}} = 8 \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $c_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $10^k \leqq c_{11} < 10^{k+1}$ となる整数 k を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(3) (2)より $C_{11} = 2^{30+\frac{3}{2^{11}}}$

$\therefore\ 10^k \leqq C_{11} < 10^{k+1} \iff k \leqq \log_{10} C_{11} < k+1$

であることから，

$k \leqq \left(30 + \frac{3}{2^{11}}\right) \cdot \log_{10} 2 < k+1$

ここで，$30 \cdot 0.3010 < \left(30 + \frac{3}{2^{11}}\right) \cdot \log_{10} 2 < 31 \cdot 0.3010$

すなわち，$9.03 < \left(30 + \frac{3}{2^{11}}\right) \log_{10} 2 < 9.331$

$\therefore\ \underline{k = 9}$ //