

2015年理工（物理・応用生物科・経営工）第1問

1 次の文章中の  から  までに当てはまる数字0~9を求めよ.

(1) 実数  $a$  に対し, 2つの2次関数

$$f(x) = x^2 - 2a^2x - a^4 - 2a^2 - 8$$

$$g(x) = -x^2 + 2(a^2 - 4)x - 3a^4 - 2a^3 - 16$$

を考える.

(i) すべての実数  $x$  に対して  $g(x) < f(x)$  が成り立つための必要十分条件は

$$a > -\text{ア} \quad \text{かつ} \quad a \neq \text{イ}$$

である.

(ii)  $g(x)$  の最大値は  $-\text{ウ} a^4 - \text{エ} a^3 - \text{オ} a^2$  である.

(iii) 次の条件(\*)を満たす実数  $b$  がただ1つ存在するとする.

(\*) 「すべての実数  $x$  に対して  $g(x) \leq b \leq f(x)$  が成り立つ。」

このとき,

$$a = -\text{カ} \quad \text{または} \quad a = \text{キ}$$

であり,  $a = -\text{カ}$  のときは  $b = -\text{ク} \text{ケ}$ ,  $a = \text{キ}$  のときは  $b = -\text{コ} \text{サ}$  である.

(2) 次の条件で定められる数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を考える.

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -2, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n \\ b_{n+1} = -25a_n - 2b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき

$$\text{シ} a_{n+1} + b_{n+1} = \text{ス} (\text{シ} a_n + b_n)$$

であるので,

$$b_n = \text{セ}^n - \text{ソ} a_n$$

である. これにより

$$\frac{a_{n+1}}{\text{タ}^n} = \frac{a_n}{\text{タ}^{n-1}} + 1$$

となる. したがって

$$a_n = n \cdot \text{チ}^{n-1} \text{ツ}$$

となる.



(3) 平面上に、 $\triangle ABC$  とその内部の点  $O$  をとったとき、

$$OA = 1 + \sqrt{3}$$

$$OB = \sqrt{3}$$

$$OC = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3}\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0}$$

となっていた。

このとき、内積  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  の値は  $-\frac{\boxed{\text{テ}} - \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$  であるので

$$\angle AOB = \boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{ヌ}} \boxed{\text{ネ}}^\circ$$

である。同様に  $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = -\frac{\boxed{\text{ノ}} - \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$  から

$$\angle AOC = \boxed{\text{ヒ}} \boxed{\text{フ}} \boxed{\text{ヘ}}^\circ$$

である。したがって、

$$\angle BOC = \boxed{\text{ホ}} \boxed{\text{マ}} \boxed{\text{ミ}}^\circ$$

となる。また、

$$\sin \boxed{\text{ホ}} \boxed{\text{マ}} \boxed{\text{ミ}}^\circ = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ム}}} (\boxed{\text{メ}} + \sqrt{\boxed{\text{モ}}})}{4}$$

である。したがって、 $\triangle ABC$  の面積は  $\boxed{\text{ヤ}} + \frac{\boxed{\text{ユ}} \sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}}{2}$  である。