

2012年理(数理情報科・応用物理・応用化学)第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) 実数  $\theta$  に対し,  $O(0, 0, 0)$  を原点とする座標をもつ空間において, 3点

$$P(\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad Q(0, \cos \theta, \sin \theta), \quad R(0, \cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

を考える。

(i)  $\theta$  が  $-\pi \leq \theta < \pi$  の範囲を動くとき,  $PQ^2$  の最大値は  であり, 最大値を与える  $\theta$  の値は  $-\frac{\text{イ}}{\text{ウ}}\pi$  と  $\frac{\text{エ}}{\text{オ}}\pi$  である。

(ii) ベクトル  $\vec{OP}$ ,  $\vec{OR}$  のなす角を  $\alpha$  とする。  $\theta$  が  $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき,  $\cos \alpha$  の最大値は  $\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$  であり, 最大値を与える  $\theta$  の値は  $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}\pi$  である。  $\theta$  が  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき,  $\cos \alpha$  の最大値は  $\frac{\sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}}$  である。  $\theta$  が  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき,  $\cos \alpha$  の最大値は  であり, 最大値を与える  $\theta$  の値は  $-\frac{\text{ス}}{\text{セ}}\pi$  である。

(2) 零行列でない2次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が, 等式  $A^2 = 4A$  を満たしているとする。

(i)  $bc = 0$  のとき,  $a + d$  の値は  または  である。また,  $bc \neq 0$  のとき,  $a + d = \text{チ}$ ,  $ad - bc = \text{ツ}$  となる。特に,  $b = c > 0$  とすると,

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{(\text{テ} - \text{ト})a} \\ \sqrt{(\text{ナ} - \text{ニ})a} & \text{ヌ} - \text{ネ} \end{pmatrix}$$

となる。

(ii) 自然数  $n$  に対し,

$$\sum_{k=1}^n {}_n C_k 4^k 3^{n-k} = \text{ノ}^n - \text{ハ}^n$$

であるから,

$$(A + 3E)^n = \frac{\text{ヒ}}{\text{フ}} (\text{ヘ}^n - \text{ホ}^n)A + \text{マ}^n E$$

となる。ここで,  $E$  は2次の単位行列を表す。