

2016年 第2問

2 n を自然数とし、 a, b, r は実数で $b > 0, r > 0$ とする。複素数 $w = a + bi$ は $w^2 = -2\bar{w}$ を満たすとする。 $\alpha_n = r^{n+1}w^{2-3n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。ただし、 i は虚数単位とし、複素数 z に共役な複素数を \bar{z} で表す。次の問いに答えよ。

- (1) a と b の値を求めよ。
- (2) 複素数平面上の3点 $O(0), A(\alpha_1), B(\bar{\alpha}_1)$ について、 $\angle AOB$ の大きさを θ とする。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。 θ の値を求めよ。
- (3) α_n の実部を c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。 c_n を n と r を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた c_n を第 n 項とする数列 $\{c_n\}$ について、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が収束し、その和が $\frac{8}{3}$ となるような r の値を求めよ。