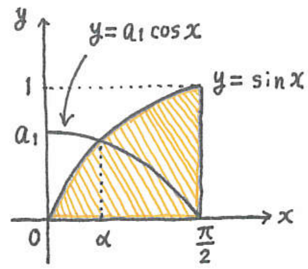
東京学芸大学

2015年第2問　1枚目／2枚

$\boxed{2}$ nを2以上の整数とする．曲線 $y=\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ および x 軸で囲まれる部分の面積を $n-1$ 本の曲線 $y=a_k\cos x$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ によって n 等分するとき，下の問いに答えよ．ただし，$0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}$ とする．

(1) $n=2$ のとき，a_1 の値を求めよ．

(2) a_k を n と k で表せ．



(1) 2曲線の交点のx座標をα $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$a_1\cos\alpha=\sin\alpha \iff \tan\alpha=a_1$

$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ に代入して，$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{a_1^2+1}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$a_1>0$ より，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a_1^2+1}}$，$\sin\alpha=\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+1}}$ …①

$y=\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とx軸，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積をSとおくと，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

また，$y=\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=a_1\cos x$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積をS_1とおくと，

$$\begin{aligned}S_1&=\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\sin x-a_1\cos x\,dx\\&=\Big[-\cos x-a_1\sin x\Big]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\\&=-a_1+\cos\alpha+a_1\sin\alpha\\&=-a_1+\frac{1}{\sqrt{a_1^2+1}}+\frac{a_1^2}{\sqrt{a_1^2+1}}\quad(\because ①より)\\&=\sqrt{a_1^2+1}-a_1\end{aligned}$$

$S_1=\dfrac{1}{2}S$ なので，$\sqrt{a_1^2+1}-a_1=\dfrac{1}{2}$

$$\sqrt{a_1^2+1}=a_1+\frac{1}{2}$$

両辺，正なので2乗して，$a_1^2+1=a_1^2+a_1+\dfrac{1}{4}$

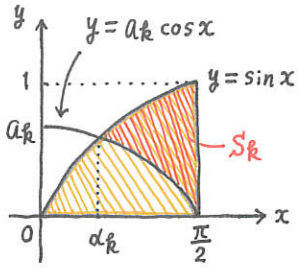
$$\therefore\ \underline{a_1=\frac{3}{4}}\ /\!/$$

2015年 第2問　　2枚目/2枚

$\boxed{2}$ n を 2 以上の整数とする．曲線 $y=\sin x\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ および x 軸で囲まれる部分の面積を $n-1$ 本の曲線 $y=a_k\cos x$（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$）によって n 等分するとき，下の問いに答えよ．ただし，$0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}$ とする．

(1) $n=2$ のとき，a_1 の値を求めよ．

(2) a_k を n と k で表せ．



面積比は ▨：▨ $=k:n-k$

(2) 2曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と $y=a_k\cos x$ の交点の x 座標を

α_k とおくと，$0<\alpha_k<\frac{\pi}{2}$ であり，(1)と同様にして，

$\tan\alpha_k=a_k$ ，$\cos\alpha_k=\dfrac{1}{\sqrt{a_k^2+1}}$ ，$\sin\alpha_k=\dfrac{a_k}{\sqrt{a_k^2+1}}$ $\cdots②$

$y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と $y=a_k\cos x$ ，$x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を S_k とおくと．

$$S_k=\int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}}\sin x-a_k\cos x\ dx$$

$$=\Big[-\cos x-a_k\sin x\Big]_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-a_k+\cos\alpha_k+a_k\sin\alpha_k$$

$$=-a_k+\frac{1}{\sqrt{a_k^2+1}}+\frac{a_k^2}{\sqrt{a_k^2+1}}$$

$$=\sqrt{a_k^2+1}-a_k$$

$S_k=\dfrac{n-k}{n}S$ なので

$$\sqrt{a_k^2+1}-a_k=\frac{n-k}{n}$$

$$\therefore\ \sqrt{a_k^2+1}=a_k+\frac{n-k}{n}$$

両辺，正なので，2乗して，

$$a_k^2+1=a_k^2+\frac{2(n-k)}{n}a_k+\left(\frac{n-k}{n}\right)^2$$

$$\therefore\ \underline{a_k=\frac{k(2n-k)}{2n(n-k)}}\ /\!/$$