

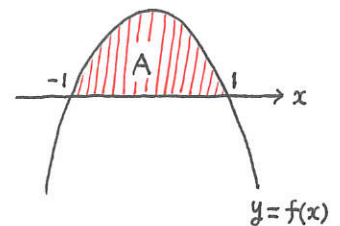
2016年工学部第3問



3 関数  $f(x) = -x^2 + 1$  について以下の問いに答えよ。

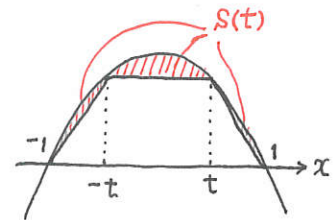
- (1)  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $A$  を求めよ。  
 (2)  $0 < t < 1$  とする。  $A$  から、4点  $(1, 0)$ ,  $(t, -t^2 + 1)$ ,  $(-t, -t^2 + 1)$ ,  $(-1, 0)$  を結んでできる台形の面積を引いた残りの面積  $S(t)$  を求めよ。  
 (3)  $S(t)$  の最小値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) A &= \int_{-1}^1 -x^2 + 1 \, dx \\
 &= \left[ -\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\
 &= \frac{4}{3} \text{ 〃}
 \end{aligned}$$



(2) 右図の台形の面積は、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cdot (2 + 2t) \cdot (-t^2 + 1) &= -t^3 - t^2 + t + 1 \\
 \therefore S(t) &= \frac{4}{3} - (-t^3 - t^2 + t + 1) \\
 &= \underline{t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3}} \text{ 〃}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (3) S'(t) &= 3t^2 + 2t - 1 \\
 &= (3t - 1)(t + 1)
 \end{aligned}$$

$0 < t < 1$  より、 $S'(t) = 0$  となるのは、 $t = \frac{1}{3}$

$\therefore$  右の増減表より、

$t$	(0)	...	$\frac{1}{3}$	...	(1)
$S'(t)$		-	0	+	
$S(t)$		↓		↑	

$$S(t) \text{ の最小値は、} S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\frac{4}{27}} \text{ 〃}$$