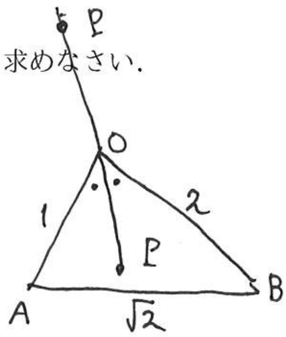
2014年 理系 第3問

$\boxed{3}$ 三角形OABにおいて，OA = 1，OB = 2，AB = $\sqrt{2}$ とする．∠Oの2等分線上の点Pを考える．

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ の値を求めなさい．

(2) OP = 1とする．実数 s，t を使って $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ と表すとき，s，t を求めなさい．



(1) 余弦定理より．$2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cos\angle O$

$\therefore\ 4\cos\angle O = 3 \qquad \therefore\ \cos\angle O = \frac{3}{4}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 1\cdot 2\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ //

(2) $|\overrightarrow{OP}|^2 = s^2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2st\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + t^2|\overrightarrow{OB}|^2$

$= s^2 + 3st + 4t^2$

一方，$|\overrightarrow{OP}| = 1$ より． $s^2 + 3st + 4t^2 = 1 \cdots ①$

∠Oの二等分線上に点Pがあるから．

$t : s = 1 : 2 \qquad \therefore\ s = 2t \cdots ②$

①，② より、 $4t^2 + 6t^2 + 4t^2 = 1$

$\therefore\ t^2 = \frac{1}{14} \qquad \therefore\ t = \pm\frac{\sqrt{14}}{14},\ s = \pm\frac{\sqrt{14}}{7}$ //