0001874095218999

大阪薬科大学

2014年 薬学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えなさい．

t を実数とする．座標平面上の2次関数 $y=f(x)$ のグラフ C は，軸が y 軸，頂点が原点Oの放物線であり，点 $(-2,\ 1)$ を通る．C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とし，点 $\mathrm{Q}(-1,\ 0)$ を通り，ℓ と垂直な直線を m とする．

(1) $f(1)$ の値は $\boxed{\ \mathrm{E}\ }$ である．

(2) ℓ の方程式を t を用いて表すと，$y=\boxed{\ \mathrm{F}\ }$ である．

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，線分PQを $1:2$ に外分する点Gの軌跡を求め，またそれを図示しなさい．

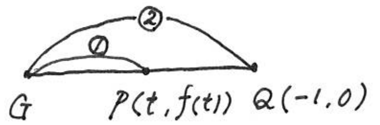
(4) m が C の接線となるとき，$t=\boxed{\ \mathrm{G}\ }$ である．このとき，C と ℓ および m で囲まれる部分の面積は $\boxed{\ \mathrm{H}\ }$ である．

(1) $f(x)=ax^2$ と表せるので，$(-2,1)$ を通ることより．$1=4a$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore f(1)=\frac{1}{4}\cdot 1^2=\underline{\frac{1}{4}}$ //

(2) $f'(x)=\frac{1}{2}x$ より．$\ell: y=\frac{t}{2}(x-t)+\frac{1}{4}t^2$ $\therefore \underline{\ell: y=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4}}$ //

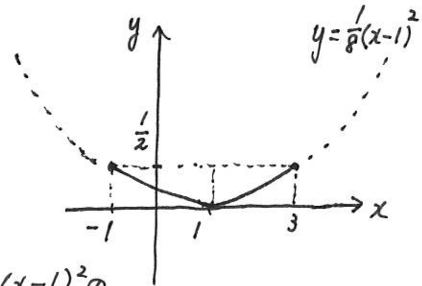
(3)



$G\left(\frac{-1-2t}{1+(-2)},\ \frac{0-2\cdot\frac{1}{4}t^2}{1+(-2)}\right)=G\left(2t+1,\ \frac{1}{2}t^2\right)$

ここで $G(X, Y)$ とおくと．

$\begin{cases} X=2t+1 \\ Y=\frac{1}{2}t^2 \end{cases}$ かつ $-1\leqq t\leqq 1$ $\Leftrightarrow$ $Y=\frac{1}{8}(X-1)^2$ $(-1\leqq X\leqq 3)$



軌跡は放物線 $y=\frac{1}{8}(x-1)^2$ の $-1\leqq x\leqq 3$ の部分 //

(4) (i) $t\neq 0$ のとき，m の傾きは $-\frac{2}{t}$ なので，$m: y=-\frac{2}{t}x-\frac{2}{t}$

$\therefore \frac{1}{4}x^2+\frac{2}{t}x+\frac{2}{t}=0$ が重解をもつ

$\therefore D/4=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{t}=0$ $\therefore t=2$

(ii) $t=0$ のとき，$m: x=-1$

これは C の接線にはならない．

(i)，(ii) より．$\underline{t=2}$ //

$S=2\int_0^2 \frac{1}{4}x^2-x+1\,dx$

$=2\int_0^2\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 dx$

$=2\left[\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)^3\right]_0^2$

$=\underline{\frac{4}{3}}$ //