0001736903628999

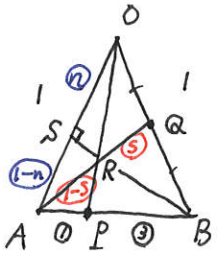
大阪府立大学

2014年 第2問

数理 石井K

2 OA＝OB＝1をみたす二等辺三角形OABにおいて，辺ABを1：3に内分する点をP，辺OBの中点をQ，直線OPと直線AQの交点をR，直線BRと辺OAの交点をSとし，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$とおく．このとき，直線BSは辺OAと直交しているとする．

(1) ベクトル$\overrightarrow{OR}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて表せ．
(2) ベクトル$\overrightarrow{BS}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて表せ．
(3) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ．
(4) 三角形OABの面積を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ で，O,R,Pは同一直線上にあるから

$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OP}$ と表せる ∴ $\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}$ ・・・①

AR：RQ＝1−s：s （0＜s＜1）とすると，$\overrightarrow{OR}=s\vec{a}+(1-s)\cdot\frac{1}{2}\vec{b}$ ・・・②

①，②より，$s=\frac{3}{4}k$，$\frac{1-s}{2}=\frac{1}{4}k$ （∵ $\vec{a}$と$\vec{b}$は一次独立）

∴ $k=\frac{4}{5}$ ①より．$\underline{\overrightarrow{OR}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{BS}=m\overrightarrow{BR}$ とおくと，(1)より．$\overrightarrow{BS}=\frac{3}{5}m\vec{a}+\frac{1}{5}m\vec{b}-m\vec{b}$ ―③

一方，$\overrightarrow{BS}=n\overrightarrow{BA}+(1-n)\overrightarrow{BO}$ （0＜n＜1）と表せるので

$\overrightarrow{BS}=n\vec{a}-\vec{b}$ ―④

$\vec{a}$と$\vec{b}$は一次独立より．③，④より，$m=\frac{5}{4}$，$n=\frac{3}{4}$ ∴④より $\underline{\overrightarrow{BS}=\frac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}}$

(3) (2)より $\overrightarrow{BS}\cdot\vec{a}=\frac{3}{4}|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$

BS⊥OAより $\overrightarrow{BS}\cdot\vec{a}=0$ なので，$\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{4}}$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos\angle AOB$ と(3)より $\cos\angle AOB=\frac{3}{4}$ ∴ $\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\underline{\frac{\sqrt{7}}{8}}$