0002270099277999

長崎大学

2016年 経済・水産・環境科学部 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

1　以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2 - x$ の頂点をPとする．点Qはこの放物線上の点であり，原点O(0, 0)とも点Pとも異なるとする．∠OPQが直角であるとき，点Qの座標を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ は以下の条件（イ），（ロ），（ハ）を満たす．そのような正の数 a の値と $f(x)$ を求めよ．

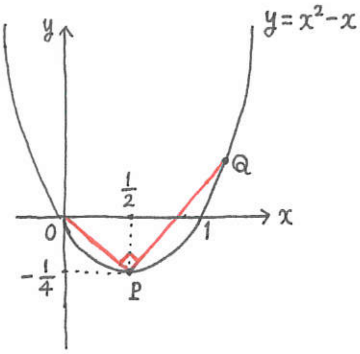
（イ）$f'(x) = x^2 + ax$

（ロ）$f(0) = -1$

（ハ）$f(x)$ の極大値と極小値の差が $\dfrac{4}{81}$

(3) 方程式 $2(\log_2 x)^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$ を解け．

(4) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，不等式 $\sin 3x + \sin 2x < \sin x$ を解け．



(1) $y = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ より，$P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

$\therefore$ 直線OP：$y = -\frac{1}{2}x$

OP⊥PQより，直線PQは傾きが2でPを通る直線

$\therefore$ PQ：$y = 2(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}$　　$\therefore y = 2x - \frac{5}{4}$

点Qは放物線と直線PQの交点のうち，点Pではない方である．

$x^2 - x - (2x - \frac{5}{4}) = 0 \iff (x-\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2}) = 0$　　$\therefore \underline{Q(\frac{5}{2}, \frac{15}{4})}$ //

(2) (イ)より，$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2 + C$（C：定数）と表せる．

(ロ)より，$f(0) = C = -1$

以上より，$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2 - 1$

また，$f'(x) = 0$ となるのは，$x = 0, -a$

右の増減表と $f(-a) = \frac{1}{6}a^3 - 1$ より，

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘	−1	↗
		極大		極小	

極大値と極小値の差は，$\frac{1}{6}a^3 - 1 - (-1) = \frac{4}{81}$

$\therefore a^3 = (\frac{2}{3})^3$　　$\therefore \underline{a = \frac{2}{3}}$ //

長崎大学

2016年 経済・水産・環境科学部 第1問

数理 石井K

2枚目／2枚

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2 - x$ の頂点をPとする．点Qはこの放物線上の点であり，原点 O(0, 0) とも点Pとも異なるとする．∠OPQが直角であるとき，点Qの座標を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ は以下の条件（イ），（ロ），（ハ）を満たす．そのような正の数 a の値と $f(x)$ を求めよ．

（イ）$f'(x) = x^2 + ax$

（ロ）$f(0) = -1$

（ハ）$f(x)$ の極大値と極小値の差が $\dfrac{4}{81}$

(3) 方程式 $2(\log_2 x)^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$ を解け．

(4) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，不等式 $\sin 3x + \sin 2x < \sin x$ を解け．

(3) 方程式は

$2|\log_2 x|^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$ と表せる

$\therefore (2|\log_2 x| + 1)(|\log_2 x| - 4) = 0$

$2|\log_2 x| + 1 > 0$ より，$|\log_2 x| = 4$

$\therefore \log_2 x = \pm 4$

$\therefore \underline{x = 16,\ \frac{1}{16}}$ //

(4) $\sin 3x + \sin 2x < \sin x \iff -4\sin^3 x + 3\sin x + 2\sin x \cos x < \sin x$

$\iff 2\sin x(2\sin^2 x - \cos x - 1) > 0$

$\iff \sin x(2\cos x - 1)(\cos x + 1) < 0$

$\sin x > 0$ のとき．すなわち，$0 < x < \pi$ のとき，$-1 < \cos x < \frac{1}{2}$ $\therefore \frac{\pi}{3} < x < \pi$ …①

$\sin x < 0$ のとき．すなわち，$\pi < x < 2\pi$ のとき，$\cos x > \frac{1}{2}$ $\therefore \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$ …②

①，②より，$\underline{\frac{\pi}{3} < x < \pi,\ \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi}$ //