熊本大学

2015年 第1問

$\boxed{1}$ a を実数とする．曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を ℓ とする．曲線 C_2 を $y = x^2 - 1$ とする．以下の問いに答えよ．

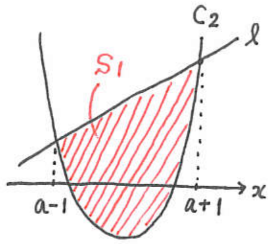
(1) ℓ と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする．曲線 $C_3 : y = -x^2 + 1$ と C_2 とで囲まれた部分は ℓ によって 2 つの部分に分けられる．これらのうち，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を含む部分の面積を求めよ．

(1) C_1 において，$y' = 2x$

$\therefore\ \ell : y = 2a(x-a) + a^2$ $\qquad \therefore\ \ell : y = 2ax - a^2$

$x^2 - 1 - (2ax - a^2) = 0 \iff \{x-(a+1)\}\{x-(a-1)\} = 0$



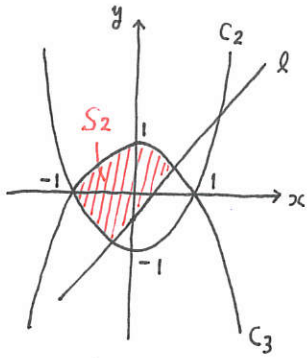
$\therefore$ ℓ と C_2 の交点の x 座標は，$x = a-1,\ a+1$

$$\therefore\ S_1 = \int_{a-1}^{a+1} 2ax - a^2 - x^2 + 1\,dx$$

$$= -\int_{a-1}^{a+1} \{x-(a-1)\}\{x-(a+1)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\{a+1-(a-1)\}^3$$

$$= \underline{\frac{4}{3}}\ /\!/$$



(2) ℓ と C_2 の交点の x 座標を求めると，

$x^2 - 1 - \left(\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \therefore\ x^2 - \sqrt{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore\ x = \dfrac{\sqrt{2} \pm 2}{2}$

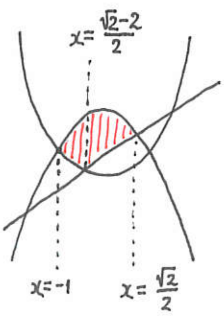
ℓ と C_3 の交点の x 座標を求めると，

$x^2 - 1 + \sqrt{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore\ x^2 + \sqrt{2}x - \frac{3}{2} = 0 \quad \therefore\ x = \dfrac{-\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{2} \quad \therefore\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$$S_2 = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} -x^2+1-(x^2-1)\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -x^2+1-\left(\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= 2\left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} + \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= 2\left\{-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{1}{3} + 1\right\} + \left\{-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\right\}$$



$$= \underline{\frac{4+5\sqrt{2}}{6}}\ /\!/$$