0002114545887999

鹿児島大学

2015年 教育学部 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 平面上に三角形ABCと点Oがあり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき

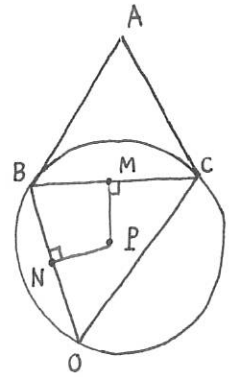
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\neq 0$$

を満たしていると仮定する．辺BCの中点をM，線分OBの中点をNとし，三角形OBCの外心をPとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) M $\neq$ P のとき，線分MPと線分OAは平行であることを示せ．

(2) $\overrightarrow{MP}=t\vec{a}$ とおいて，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{NP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および実数 t を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{NP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



(1) 直線MPは線分BCの垂直二等分線であるから，

$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{BC}$ …①

一方，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より，

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$ …②

①，② より，$\overrightarrow{MP}\parallel\overrightarrow{OA}$ ■

(2) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{MO}$

$=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{OM}$

$=\underline{t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$ //

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}$

$=t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$=\underline{t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}}$ //

(3) $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{OB}=(t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c})\cdot\vec{b}$

$=t\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=(t+\frac{1}{2})\vec{a}\cdot\vec{b}$ （$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ より）

$\therefore$ $\overrightarrow{NP}\perp\overrightarrow{OB}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$ より，$t=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\underline{\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}，\overrightarrow{NP}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}}$ //