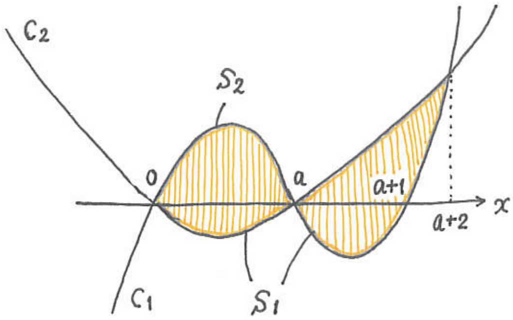
自治医科大学

2016年 医学部 第23問

$\boxed{23}$ 曲線 $C_1 : y = x(x-a)(x-a-1)$ と曲線 $C_2 : y = x(x-a)$ について考える．C_1 と C_2 で囲まれたすべての図形の面積を S_1 とし，$0 \leqq x \leqq a$ で C_1 と C_2 によって囲まれた図形の面積を S_2 とする．$\dfrac{S_1}{S_2} = 2$ となるとき，a の値を求めよ．ただし，a は正の実数とする．



C_1 と C_2 の交点の x 座標は.

$x(x-a)(x-a-1) - x(x-a) = 0$

$x(x-a)(x-a-2) = 0$ より

$x = 0, a, a+2$

$$\frac{S_1}{S_2} = 2 \iff S_1 = 2S_2$$
$$\iff S_1 - S_2 = S_2$$
$$\iff \int_0^{a+2} x(x-a)(x-a-1) - x(x-a)\,dx = 0$$

ここで, $\displaystyle\int_0^{a+2} x(x-a)(x-a-1) - x(x-a)\,dx = \int_0^{a+2} x^3 - 2(a+1)x^2 + (a^2+2a)x\,dx$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}(a+1)x^3 + \frac{a^2+2a}{2}x^2\right]_0^{a+2}$$

$$= \frac{1}{4}(a+2)^4 - \frac{2}{3}(a+1)(a+2)^3 + \frac{1}{2}(a^2+2a)(a+2)^2$$

$$= \frac{1}{12}(a+2)^3(a-2)$$

$\therefore$ $a > 0$ より. $\underline{a = 2}$ //