2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x)=|x^2-3x+2|$ とする．曲線 $y=f(x)$ を C とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線を ℓ とする．ただし，$1<a<2$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と接線 ℓ の共有点のうち，接点Aとは異なる2つの点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，$\beta-\alpha$ を a で表せ．

(3) 曲線 C と接線 ℓ で囲まれた部分の面積を S とするとき，S のとりうる値の範囲を求めよ．

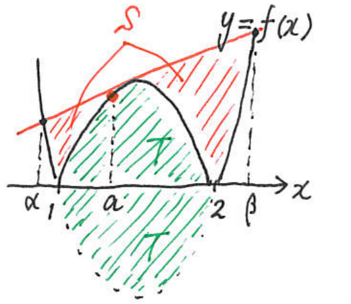
(1) $f(x)=|(x-2)(x-1)|$

$1<x<2$ では．$f(x)=-x^2+3x-2$

$\therefore f'(x)=-2x+3 \quad (1<x<2)$

$\therefore \ell$ は $y=(-2a+3)(x-a)-a^2+3a-2$

$\therefore \underline{y=(-2a+3)x+a^2-2}$ //



(2) 右のグラフより．$\alpha<1$，$\beta>2$ であるから．

ℓ と $y=x^2-3x+2$ の交点の x 座標は．

$x^2-3x+2-(-2a+3)x-a^2+2=0$

$x^2+(2a-6)x-a^2+4=0$

$\therefore \alpha+\beta=6-2a$，$\alpha\beta=4-a^2$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(6-2a)^2-4\cdot(4-a^2)$

$=8a^2-24a+20$

$\beta>\alpha$ より

$\underline{\beta-\alpha=2\sqrt{2a^2-6a+5}}$ //

(3) $S=(S+2T)-2T$ より

$S=\int_\alpha^\beta (-2a+3)x+a^2-2-x^2+3x-2\,dx$

$-2\int_1^2 -x^2+3x-2\,dx$

$=\int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$+2\int_1^2 (x-2)(x-1)\,dx$

$\therefore S=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3-\frac{2}{6}\cdot 1^3$

(2)より $S=\frac{4}{3}(2a^2-6a+5)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}$

$=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\leqq S<1$

$a=1,2$ のとき

$\underline{\frac{\sqrt{2}-1}{3}\leqq S<1}$ //