

2012年 医学部 第4問

4 自然数を自然数に移す関数  $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ n+1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$  について、 $f$  が  $m$  を  $n$  に移すことを、 $m \xrightarrow{f} n$  と表す。例えば、

$$2 \xrightarrow{f} 1, \quad 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1$$

である。2以上の自然数  $n$  を  $f$  で繰り返し移すとき、1に移るまでに必要な最小の移動回数を  $a_n$  とする。したがって、 $a_2 = 1$ 、 $a_3 = 3$  である。 $n$  を自然数として、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_{2n+1}$  と  $a_{2n+2}$  をそれぞれ  $a_{n+1}$  を用いて表せ。  
 (2) 数列  $\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$  を次のように、第  $n$  群の項数が  $2^{n-1}$  になるように分ける。

$$a_2 \mid a_3, a_4 \mid a_5, a_6, a_7, a_8 \mid a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16} \mid \dots$$

- (i) 第  $n$  群の初項を  $n$  を用いて表せ。  
 (ii) 第  $n$  群の総和を  $S_n$  とする。 $S_{n+1}$  を  $n$  と  $S_n$  を用いて表せ。また、 $S_n$  を  $n$  を用いて表せ。  
 (iii)  $\sum_{k=2}^{2^n} a_k$  を  $n$  を用いて表せ。