0001108451988999

電気通信大学

2012年 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 次の条件をみたす2次正方行列 A, B を考える．

$$AB=-E,\quad A-B=E \quad (E\text{は単位行列})$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) A^2-A を求めよ．

(2) A^3 を求めよ．

(3) $A^n=E$ となる最小の正の整数 n を求めよ．

(4) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき，$a+d$, $ad-bc$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，a, b, c, d は実数とする．

(5) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるとき，A を求めよ．

(1) $A-B=E$ の左から A をかけて $A^2-AB=A$

$AB=-E$ であるから，$A^2+E=A$　$\therefore \underline{A^2-A=-E}$ //

(2) (1)で求めた $A^2-A=-E$ の両辺に A をかけて

$A^3-A^2=-A$　再び $A^2=A-E$ を代入して $A^3=A-E-A$　$\therefore \underline{A^3=-E}$ //

(3) $A^1=E$ が成り立つと仮定すると (2)より $E^3=-E$ となりこれは成り立たないので矛盾．

$A^2=E$ が成り立つと仮定すると，(2)より．$A\cdot E=-E$　$\therefore A=-E$ となるが

(1)で求めた $A^2-A=-E$ に代入すると，$E+E=-E$ となり．これは成り立たないので矛盾．また，$A^3=-E$ より $n=3$ のときも成り立たない．

$n=4$ のとき成り立つと仮定すると，$A^4=E$　これに $A^3=-E$ を代入して，$-A=E$

再び (1) の $A^2-A=-E$ に代入すると矛盾する．

$n=5$ のとき成り立つと仮定すると，$A^5=E$，$A^3=-E$ を代入して $A^2=-E$

$A^3=A\cdot A^2=-E$ なので $A=E$ となり矛盾．$\therefore n\geqq 6$ であるが

$A^6=A^3\cdot A^3=E$ となり成り立つ　$\therefore \underline{n=6}$ //

(4) ケーリー・ハミルトンの定理より．$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

$\therefore A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$，一方 (1)より．$A^2=A-E$

$\therefore (a+d)A-(ad-bc)E=A-E$　$\Leftrightarrow$ $(a+d-1)A=(ad-bc-1)E$

(i) $a+d-1=0$ のとき．

$a+d=1$ かつ $ad-bc=1$

(ii) $a+d-1\neq 0$ のとき．　(k：実数)

$A=\dfrac{ad-bc-1}{a+d-1}E$　$\therefore A=kE$ と表せる．

$A^3=-E$ より $A^3=k^3E=-E$

$\therefore (k^3+1)E=O$　$\therefore (k+1)(k^2-k+1)=0$

k：実数より $k=-1$　$\therefore A=-E$

$\therefore A^2=E$ これは(3)に反する．

$\therefore \underline{a+d=1,\ ad-bc=1}$ //

0001108451988999

電気通信大学

2012年 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 次の条件をみたす2次正方行列 A, B を考える.

$AB=-E,\quad A-B=E$ （E は単位行列）

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) A^2-A を求めよ.

(2) A^3 を求めよ.

(3) $A^n=E$ となる最小の正の整数 n を求めよ.

(4) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき，$a+d$, $ad-bc$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，a, b, c, d は実数とする.

(5) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるとき，A を求めよ.

(5) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ より. $\begin{cases} a=3 \\ c=1 \end{cases}$

(4) より. $a+d=1$, $ad-bc=1$ なので,

$d=-2$, $b=-7$

$\therefore\ \underline{A=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$ //