



2012年理工（一般）第4問

4 関数  $f(x)$  の第  $n$  次導関数を  $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$  で表す。いま、自然数  $n$  に対して関数  $H_n(x)$  を次で定義する。

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

以下の問いに答えよ。

- (1)  $H_1(x)$ ,  $H_2(x)$ ,  $H_3(x)$  を求めよ。
- (2) 導関数  $\frac{d}{dx} H_n(x)$  を  $H_n(x)$  と  $H_{n+1}(x)$  を用いて表せ。さらに、 $n$  に関する数学的帰納法により  $H_n(x)$  が  $n$  次多項式（整式）であることを証明せよ。
- (3)  $n \geq 3$  のとき、定積分

$$S_n(a) = \int_0^a x H_n(x) e^{-x^2} dx$$

を  $H_{n-1}(a)$ ,  $H_{n-2}(a)$ ,  $H_{n-2}(0)$  を用いて表せ。ただし、 $a$  は実数とする。

- (4)  $n = 6$  のとき、極限值  $\lim_{a \rightarrow \infty} S_6(a)$  を求めよ。

必要ならば、自然数  $k$  に対して  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x^2} = 0$  が成り立つことを用いてよい。