



2012年理工（理数選抜）第2問

2 2次関数や3次関数 $y = f(x)$ から新しい関数 $F(x)$ を次のように作る.

実数 x に対して, $f(\alpha) = f(x)$ を満たす最大の α をとり

$$F(x) = \alpha - x$$

と定める.

例えば, $f(x) = x^2$ の場合, 実数 x に対して α の方程式 $f(\alpha) = f(x)$ は $\alpha^2 = x^2$ であり, $\alpha = \pm x$ となる. したがって, その2つの α のうち大きい方をとれば次を得る.

$$x < 0 \text{ のとき } \alpha = -x \text{ により } F(x) = \alpha - x = -2x = 2|x|$$

$$x \geq 0 \text{ のとき } \alpha = x \text{ により } F(x) = \alpha - x = 0$$

以下では $f(x) = x^3 - 3b^2x$ ($b > 0$) に対して, 上の操作で定めた関数 $F(x)$ を考える.

- (1) $F(-b)$, $F(0)$, $F(b)$ の値を求めよ.
- (2) $F(x) = 0$ となる x の範囲を求めよ. また $F(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.
- (3) $F(x) > 0$ となる x に対し, $f(\alpha) = f(x)$ を満たす最大の α を x の式で表せ.
- (4) 関数 $y = F(x)$ を求め, そのグラフの概形をかけ. また $F(x)$ の最大値を求めよ.