

2014年理系第3問

数理
石井K

3 関数 $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ について、以下の設問に答えよ。

- (1) 不等式 $f(x) > -\frac{1}{2}$ を解け。
 (2) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ。
 (3) 関数 $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。
 (4) $a > 0$ とする。 $x \geq 0$ において、曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸、および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。 $S(a) \geq 2$ となる a の値の範囲を求めよ。

$$(1) \frac{2x}{x^2+4} > -\frac{1}{2} \quad (x^2+4 > 0 \text{ より}) \quad 4x > -x^2-4$$

$$\therefore x^2+4x+4 > 0 \quad (x+2)^2 > 0 \quad \therefore x \neq -2 \text{ となるすべての}$$

$$(2) f'(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-2(x^2-4)}{(x^2+4)^2} \quad \text{実数} //$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

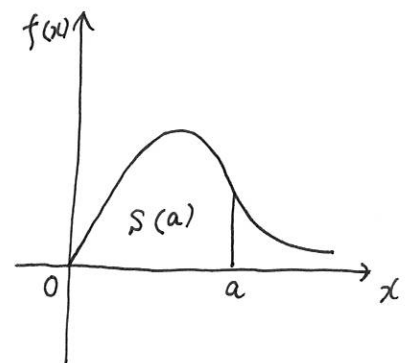
$$\therefore \begin{cases} \text{最大値 } \frac{1}{2} (x=2) \\ \text{最小値 } -\frac{1}{2} (x=-2) \end{cases} //$$

x	$(-\infty)$	\dots	-2	\dots	2	\dots	(∞)
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	(0)	\downarrow	$-\frac{1}{2}$	\uparrow	$\frac{1}{2}$	\downarrow	(0)

$$(4) S(a) = \int_0^a \frac{2x}{x^2+4} dx$$

$$= [\log|x^2+4|]_0^a$$

$$= \log \frac{a^2+4}{4}$$



$$\therefore \log \frac{a^2+4}{4} \geq 2 \quad \text{より} \quad \frac{a^2+4}{4} \geq e^2 \quad a^2+4 \geq 4e^2$$

$$a^2 \geq 4(e^2-1) \quad \therefore a > 0 \text{ より} \quad \underline{a \geq 2\sqrt{e^2-1}} //$$