秋田大学

2010 年 第 1 問

$\boxed{1}$ 2 次方程式 $x^2\sin\theta - x\cos(2\theta) + \sin\theta = 0$ が重解をもつとき，次の問いに答えよ．ただし，θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．

(1) $\sin\theta$ の値を求めよ．
(2) $\sin\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ．
(3) θ と $\frac{\pi}{12}$ の大小を比較せよ．

(1) 2次方程式の判別式を D とおくと，

$$D = \{-\cos(2\theta)\}^2 - 4\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta$$
$$= \cos^2 2\theta - 4\sin^2\theta$$
$$= (\cos 2\theta + 2\sin\theta)(\cos 2\theta - 2\sin\theta)$$
$$= (1 - 2\sin^2\theta + 2\sin\theta)(1 - 2\sin^2\theta - 2\sin\theta)$$
$$= 4\left(\sin^2\theta - \sin\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\sin^2\theta + \sin\theta - \frac{1}{2}\right)$$

重解をもつことから $D = 0$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より，$0 < \sin\theta < 1$ なので $\underline{\sin\theta = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$ //

(2) $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\ //$$

$\sin\theta = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$ に気づけば それを使った方が速い！

(3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ より，

θ と $\frac{\pi}{12}$ の大小関係 と $\sin\theta$ と $\sin\frac{\pi}{12}$ の大小関係は等しい

また，$\sin\theta > 0$，$\sin\frac{\pi}{12} > 0$ より，2乗して大小を比較する．

$$\sin^2\theta - \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} - \frac{8-4\sqrt{3}}{16}$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$
$$> 0$$

$\therefore \sin\theta > \sin\frac{\pi}{12}$ すなわち $\underline{\theta > \frac{\pi}{12}}$ //