0001505454948999

会津大学

2013年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ n を自然数とする．行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ について，次の手順で A^n を求める．このとき，以下の空欄をうめよ．

(1) 行列 $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}$ が $P^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}P=A$ を満たすとき，$a=\boxed{\text{イ}}$ -1，$b=\boxed{\text{ロ}}$ 1 である．

(2) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}x_n & \frac{n}{2}x_n\\ 0 & x_n\end{pmatrix}$ と表せる．このとき，$x_n=\boxed{\text{ハ}}$ 2^n である．

(3) $A^n=\boxed{\text{ニ}}$ である．$\begin{pmatrix}-(n-2)\cdot 2^{n-1} & n\cdot 2^{n-1}\\ -n\cdot 2^{n-1} & (n+2)\cdot 2^{n-1}\end{pmatrix}$

(1) 両辺に左から P をかけて．$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}P=PA$

$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+a & b\\ 2a & 2b\end{pmatrix}$

$PA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a-b & a+3b\end{pmatrix}$

∴ 成分を比較して．$2+a=1$，$b=1$，$2a=a-b$，$2b=a+3b$

∴ $\underline{a=-1,\ b=1}$ //

この結果から $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ (3)で使う

(2) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}8 & 12\\ 0 & 8\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}16 & 32\\ 0 & 16\end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$ と類推できるので，数学的帰納法で示す

(i) $n=1$ のとき $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^1=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると．$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}2^k & k\cdot 2^{k-1}\\ 0 & 2^k\end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}2^{k+1} & (k+1)\cdot 2^k\\ 0 & 2^{k+1}\end{pmatrix}$ ∴ $n=k+1$ のとき成り立つ

(i)，(ii)より．すべての自然数 n に対して．$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$ が成り立つ

∴ $\underline{x_n=2^n}$ //

(3) (1)より．$\underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}P\cdot P^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}P\cdots P^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}P}_{n\text{コ}}=A^n$

∴ $P^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^nP=A^n$ ∴ $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-(n-2)\cdot 2^{n-1} & n\cdot 2^{n-1}\\ -n\cdot 2^{n-1} & (n+2)\cdot 2^{n-1}\end{pmatrix}}$ //