0001867542318999

鳥取大学

2014年医（医）第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 1以上の整数 p, q に対し，$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $B(p,\ q)=B(q,\ p)$ が成り立つことを示せ．

(2) 関係式

$$B(p+1,\ q)=\frac{p}{p+q}B(p,\ q) \qquad B(p,\ q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,\ q)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $B(5,\ 4)$ を求めよ．

$t=1-x$ として置換積分

(1) $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}\cdot(-dt)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt$

$\therefore B(p,q)=B(q,p)$ ■

(2) $B(p+1,q)=\int_0^1 x^p\cdot\left\{-\frac{1}{q}(1-x)^q\right\}'dx=\left[-\frac{1}{q}x^p(1-x)^q\right]_0^1-\int_0^1 p\cdot x^{p-1}\cdot\left\{-\frac{1}{q}(1-x)^q\right\}dx$

$=\frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx$

$=\frac{p}{q}B(p,q+1)$ …①

また，$B(p+1,q)+B(p,q+1)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}+x^{p-1}(1-x)^q\,dx$

$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(x+1-x)\,dx$

$=B(p,q)$ …②

①，②より．$B(p+1,q)+\frac{q}{p}B(p+1,q)=B(p,q)$

$\therefore B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q)$ ■

これを②に代入して，$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$ ■

(3) (2)より．$B(5,4)=\frac{3}{8}B(5,3)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot B(5,2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot B(5,1)$

$\therefore B(5,4)=\frac{1}{56}\int_0^1 x^4\,dx$

$=\frac{1}{56}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$

$=\underline{\frac{1}{280}}$ //