

2015年 教育学部 第4問

 数理
石井

 4 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について、次の各問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底であり、 $x > 0$ とする。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。また、曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ、その概形を描け。ただし、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸、および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

$$(1) f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) \\ = (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = -1 \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot (-e^{-x}) \\ = (x-2)e^{-x}$$

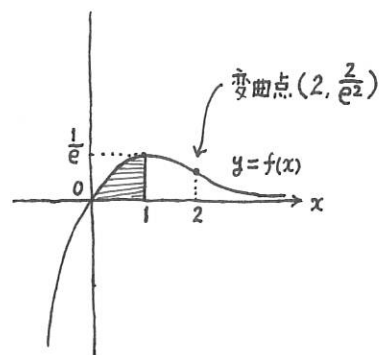
また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ より、

増減表は右のようになる。 \therefore 極大値 $\frac{1}{e}$ ($x=1$ のとき)、

また、グラフは右のようになる。

x	$(-\infty)$	\cdots	1	\cdots	2	\cdots	(∞)
$f'(x)$		+	0	-	-	-	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	
$f(x)$	$(-\infty)$	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow	$\frac{2}{e^2}$	\searrow	(0)

極大



(2) 右のグラフより、

$$S = \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$= \int_0^1 x (-e^{-x})' dx$$

$$= [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx$$

$$= -\frac{1}{e} - [e^{-x}]_0^1$$

$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$$

$$= \underline{1 - \frac{2}{e}}$$