

2014年人間科学学部(文系)第5問

5 角Aが鈍角の三角形ABCにおいて $AB = 2$, $AC = 3$ であり, 三角形ABCの面積は $2\sqrt{2}$ である. このとき, 三角形ABCの垂心をHとすると

$$\vec{AH} = \frac{\begin{matrix} -11 \\ \boxed{\text{ナ}} \end{matrix} \vec{AB} + \begin{matrix} -6 \\ \boxed{\text{ニ}} \end{matrix} \vec{AC}}{\begin{matrix} \boxed{\text{ヌ}} \\ 16 \end{matrix}}$$

である.

直線AHと直線BCの交点をMとおき, $BM:MC = t:1-t$ とする

また, $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$ とおく

このとき, $\triangle ABC$ の面積は, $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \angle BAC = 2\sqrt{2} \quad \therefore \sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\angle BAC$ が鈍角より $\cos \angle BAC < 0$ より, $\cos \angle BAC = -\frac{1}{3}$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle BAC = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \vec{AM} \cdot \vec{BC} &= \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= -(1-t) \cdot 4 + 9t + (1-2t) \cdot (-2) \quad (\because \textcircled{1} \text{より}) \\ &= 17t - 6 \end{aligned}$$

$$\vec{AM} \perp \vec{BC} \text{ より } \vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0 \quad \therefore t = \frac{6}{17}$$

このとき, $\vec{AH} = k\vec{AM}$ と表されるので, $\vec{AH} = \frac{11}{17}k\vec{a} + \frac{6}{17}k\vec{b}$

$$\therefore \vec{BH} = \vec{AH} - \vec{a} = \left(\frac{11}{17}k - 1\right)\vec{a} + \frac{6}{17}k\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \vec{BH} \cdot \vec{b} &= -2 \cdot \left(\frac{11}{17}k - 1\right) + \frac{54}{17}k \\ &= \frac{32}{17}k + 2 \end{aligned}$$

$$\vec{BH} \perp \vec{b} \text{ より } \vec{BH} \cdot \vec{b} = 0 \text{ なので, } k = -\frac{17}{16}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AH} &= -\frac{11}{16}\vec{a} - \frac{6}{16}\vec{b} \\ &= \frac{-11\vec{a} - 6\vec{b}}{16} \end{aligned}$$

————— //

