



2014年法(国際)第3問

3 a を -1 でない実数とし、座標平面において、放物線

$$C: y = (x^2 - 2x + 1) + a(x^2 - 5x + 6)$$

を考える。

(1) C は、 a の値によらず2点 $P(\square{\text{ソ}}, \square{\text{タ}})$, $Q(\square{\text{チ}}, \square{\text{ツ}})$ を必ず通る。ただし、 $\square{\text{ソ}} < \square{\text{チ}}$ とする。

(2) 点 P における C の接線を l , 点 Q における C の接線を l' とする。 l と l' の交点の座標は $\left(\frac{\square{\text{テ}}}{\square{\text{ト}}}, \frac{\square{\text{ナ}}}{\square{\text{ニ}}}\right) a$ である。

(3) C の軸は $x = \frac{1}{2} \left(\square{\text{ネ}} + \frac{\square{\text{ノ}}}{a + \square{\text{ハ}}} \right)$ である。

(4) C が x 軸と異なる2点で交わるのは
 $a < \square{\text{ヒ}}$ または $\square{\text{フ}} < a$ (ただし $a \neq -1$)
 のときである。

(5) $a = \square{\text{フ}}$ のとき、 C は点 $\left(\frac{\square{\text{ヘ}}}{\square{\text{ホ}}}, 0\right)$ で x 軸と接する。

(6) C が x 軸と2点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ (ただし $\alpha < \beta$) で交わる時、 $\beta - \alpha = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ となるのは、 $a = \square{\text{マ}}$
 または $a = \frac{\square{\text{ミ}}}{\square{\text{ム}}}$ のときである。ただし、 $\square{\text{マ}} < \frac{\square{\text{ミ}}}{\square{\text{ム}}}$ とする。 $a = \square{\text{マ}}$ のとき、 C と x
 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{\square{\text{メ}}}{\square{\text{モ}}}\sqrt{\square{\text{ヤ}}}$ である。