



2015年 理工学部 第4問

4 xyz 空間において, xy 平面上に 4 点

$$A_1(1, 0, 0), \quad B_1(0, 1, 0), \quad C_1(-1, 0, 0), \quad D_1(0, -1, 0)$$

を頂点とする正方形 $A_1B_1C_1D_1$ がある. $0 < \theta < \pi$ とし, この正方形 $A_1B_1C_1D_1$ を xy 平面上で原点を中心に角 θ だけ回転させた後で z 軸の正の方向に 2 だけ平行移動した正方形を $A_2B_2C_2D_2$ とする.

動点 P_1, P_2 が, それぞれ点 A_1, A_2 から同時に出発し, 正方形 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ の周上を, 同じ速さで同じ向きに一周する. このとき, 線分 P_1P_2 が動いてできる曲面と正方形 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ とで囲まれる立体を V とする.

(1) 線分 P_1P_2 の長さの最大値は $\sqrt{\square\text{ト} + \square\text{ナ} \square\text{キ}}$ であり, 線分 P_1P_2 の長さの最小値は $\sqrt{\square\text{ニ} + \square\text{ハ}}$ である.

(2) $0 < h < 2$ とするとき, 平面 $z = h$ による立体 V の断面は, 一辺の長さが

$$\sqrt{\square\text{ネ} + (\square\text{ノ} h^2 + \square\text{ハ} h)(1 - \square\text{ケ})}$$

の正方形であり, その一辺の長さは $h = \square\text{ヒ}$ のとき最小である.

(3) 立体 V の体積は $\frac{\square\text{フ}}{\square\text{ヘ}} + \frac{\square\text{ホ}}{\square\text{マ}} \square\text{コ}$ である.

(4) θ が π に限りなく近づくとき, 立体 V の体積は $\frac{\square\text{ミ}}{\square\text{ム}}$ に収束する.

$\square\text{キ} \sim \square\text{コ}$ の選択肢:

(a) $\sin \theta$ (b) $\cos \theta$ (c) $\tan \theta$ (d) $\sin^2 \theta$ (e) $\cos \theta \sin \theta$

(f) $\frac{1}{\sin \theta}$ (g) $\frac{1}{\cos \theta}$ (h) $\frac{1}{\tan \theta}$

