上智大学

2012年 経済（経済） 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) △OABに対し，

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0$$

とする．また，△OABの面積を S とする．

(i) $1\leqq s+t\leqq 3$ のとき，点Pの存在しうる領域の面積は S の $\boxed{\text{ア}}$ 倍である．　8

(ii) $1\leqq s+2t\leqq 3$ のとき，点Pの存在しうる領域の面積は S の $\boxed{\text{イ}}$ 倍である．　4

(2) $(\sqrt{2})^n$ は n が奇数のとき無理数である．より一般に，2以上の整数 k に対し，$(\sqrt[k]{2})^n$ は n が k の倍数でないとき無理数である．したがって，2以上の整数 k に対し，

$$\left(\sqrt{2}x+\sqrt[k]{2}\right)^{100}$$

を展開して得られる x の多項式において，

(i) x^{100} の係数は2の $\boxed{\text{ウ}}$ 乗，　50

(ii) $n=0,\ 1,\ \cdots,\ 100$ に対し，x^n の係数が整数となるような n の個数は

$k=2$ のとき $\boxed{\text{エ}}$ 個　101

$k=3$ のとき $\boxed{\text{オ}}$ 個　17

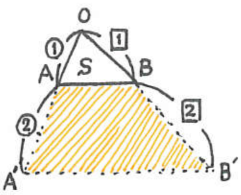
$k=5$ のとき $\boxed{\text{カ}}$ 個　11

$k=7$ のとき $\boxed{\text{キ}}$ 個　8

$k=51$ のとき $\boxed{\text{ク}}$ 個　1

である．

(1)(i)



$9S-S=8S$

$\therefore$ 8倍 //

(ii) $t'=2t$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+\frac{t'}{2}\overrightarrow{OB}$，$1\leqq s+t'\leqq 3$

$\therefore$ 線分OBの中点を B_0 とすると

$\therefore 3\cdot\frac{3}{2}S-1\cdot\frac{1}{2}S=4S$

$\therefore$ 4倍 //

(2)(i) $(\sqrt{2}x)^{100}=2^{50}x^{100}$

$\therefore$ 2の50乗 //

(ii) • $k=2$ のとき

$$(\sqrt{2}x+\sqrt{2})^{100}=(\sqrt{2})^{100}(x+1)^{100}$$
$$=2^{50}(x+1)^{100}$$

$\therefore$ 展開してでてくるすべての項の係数が整数

$\therefore x^0, x^1, \cdots, x^{100}$ の 101個 //

• $k\geqq 3$ のとき 2項定理より

$$(\sqrt{2}x+2^{\frac{1}{k}})^{100}=\sum_{n=0}^{100}{}_{100}C_n\cdot(\sqrt{2})^n\cdot 2^{\frac{100-n}{k}}\cdot x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{100}{}_{100}C_n\cdot 2^{\frac{kn+200-2n}{2k}}\cdot x^n\ \cdots(*)$$

• $k=3$ のとき．

$(*)$ より，x^n の係数が整数になるのは，

$\frac{200+n}{6}$ が整数になるとき．

$\therefore n=4, 10, 16, \cdots 100$ の 17個 //

• $k=5$ のとき．

同様に $\frac{200+3n}{10}$ が整数になるとき

$\therefore n=0, 10, 20, \cdots, 100$ の 11個 //

• $k=7$ のとき．

$\frac{200+5n}{14}$ が整数になるとき

$\therefore n=2, 16, 30, 44, \cdots, 100$ の 8個 //

• $k=51$ のとき．

$\frac{200+49n}{102}$ $\therefore n=100$ の 1個 //

$=1+\frac{49(n+2)}{102}$

49と102は互いに素 $\therefore n+2$ は102の倍数