東京女子大学

2014年 現代教養 第5問

$\boxed{5}$ 片方の面が白色，もう片方の面が黒色のカードを一枚用意する．さいころをひとつ投げ，目が2以下ならばカードを裏返し，3以上の場合はそのままにする．最初はカードの白色の面が表であるとし，さいころを n 回投げたあとでカードの表が白色である確率を p_n とする．

(1) p_1 および p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) p_n を求めよ．

(4) $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

白→黒→白　　白→白→白

(1) $p_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $p_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$ //

(2) $n+1$ 回目で白色になるのは，
$\begin{cases} n\text{回目に白で，さいころの目が3以上} \\ n\text{回目に黒で，さいころの目が2以下} \end{cases}$

$\therefore p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n)$

$\therefore p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$ //

メモに書く（解答には書かない）
特性方程式
$\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}$ より $\alpha = \frac{1}{2}$

(3) (2)の漸化式より，$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項が $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$，公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列

$\therefore p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$　　$\therefore p_n = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\right\}$ //

$\left(p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right.$ でもよい$\left.\right)$

(4) $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\to 0} + 1\right\} = \frac{1}{2}$ //