長岡技術科学大学

2016年 工学部 第2問

2 平面内にベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ がある．下の問いに答えなさい．

(1) 次の等式を証明しなさい．

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$$

(2) m, n を実数とするとき，次の等式を証明しなさい．

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|^2+mn|\vec{a}-\vec{b}|^2=(m+n)(m|\vec{a}|^2+n|\vec{b}|^2)$$

(3) △OABにおいて，OA＝2，OB＝4，AB＝3とする．線分ABを2：1に内分する点をCとするとき，線分OCの長さを求めなさい．

(1) (左辺) $=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$=4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=$ (右辺) ▨

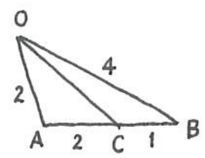
(2) (左辺) $=(m\vec{a}+n\vec{b})\cdot(m\vec{a}+n\vec{b})+mn(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=m^2|\vec{a}|^2+2mn\vec{a}\cdot\vec{b}+n^2|\vec{b}|^2+mn(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$=m(m+n)|\vec{a}|^2+n(m+n)|\vec{b}|^2$

$=(m+n)(m|\vec{a}|^2+n|\vec{b}|^2)$

$=$ (右辺) ▨



(3) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

(2)で示した等式に $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{2}{3}$ を代入して，

$|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}|^2+\frac{2}{9}|\vec{a}-\vec{b}|^2=1\cdot(\frac{1}{3}|\vec{a}|^2+\frac{2}{3}|\vec{b}|^2)$

$\therefore |\overrightarrow{OC}|^2+\frac{2}{9}|\overrightarrow{BA}|^2=\frac{1}{3}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{2}{3}|\overrightarrow{OB}|^2$

$\therefore |\overrightarrow{OC}|^2=\frac{4}{3}+\frac{32}{3}-\frac{2}{9}\cdot 9$

$=10$

$\therefore |\overrightarrow{OC}|=\underline{\sqrt{10}}$ //