自治医科大学

2010年 医学部 第16問

数理 石井K

16 連立方程式 $x+y=8$, $\cos\theta - x\sin\theta = x$, $\sin\theta + y\cos\theta = 1$ を満たす y の解は2つある．その2つの解を α, β とするとき，$|\alpha-\beta|$ の値を求めよ．ただし，x, y は実数とする．

$\cos\theta - x\sin\theta = x$ より．　$x(1+\sin\theta) = \cos\theta$ ・・・①

$\sin\theta + y\cos\theta = 1$ より　$y\cos\theta = 1-\sin\theta$ ・・・②

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ として考えてもよいので

(i) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき

①より．$x=0$．　$x+y=8$ より　$y=8$

これは ② をみたす．

(ii) $\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき

②より．　$0=2$　∴ 成り立つ y は存在しない

(iii) $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ のとき

①より．$x = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$　②より．$y = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$x+y=8$ に代入して．

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = 8$$

$$\therefore \cos^2\theta + 1 - \sin^2\theta = 8\cos\theta(1+\sin\theta)$$

$$\therefore 2\cos\theta(\cos\theta - 4\sin\theta - 4) = 0$$

$\cos\theta \neq 0$ より．$\cos\theta = 4(\sin\theta+1)$

①に代入して．$(1+\sin\theta)(x-4)=0$　$1+\sin\theta \neq 0$ より　$x=4$

$\therefore x+y=8$ より．　$y=4$

(i)〜(iii)より．$|\alpha-\beta| = |8-4| = \underline{4}$