



2014年第4問

4 以下の問いに答えよ.

- (1) $p > 1, q > 1$ のとき, 不等式 $p + q < pq + 1$ を証明せよ.
 (2) $a > 1, b > 1$ のとき, 不等式 $\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$ を証明せよ.
 (3) $a > 1, b > 1, c > 1$ のとき, 不等式 $\sqrt{a+b+c-2} < \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 2$ を証明せよ.

$$\begin{aligned}
 (1) \text{(右辺)} - \text{(左辺)} &= pq - p - q + 1 \\
 &= (p-1)(q-1) \\
 &> 0 \quad (\because p > 1, q > 1) \quad \square
 \end{aligned}$$

(2) 両辺とも正なので, 2乗して. $a+b-1 < a+b+1+2\sqrt{ab}-2\sqrt{a}-2\sqrt{b}$
 を示せばよい. すなわち, $\sqrt{ab}+1 > \sqrt{a}+\sqrt{b}$ を示せばよいが
 これは, (1)の式に $p=\sqrt{a}, q=\sqrt{b}$ を代入したもののなで成り立つ \square
 ($a > 1, b > 1$ より, $p=\sqrt{a} > 1, q=\sqrt{b} > 1$ をみたしている)

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sqrt{a+(b+c-1)-1} &< \sqrt{a} + \sqrt{b+c-1} - 1 && \text{(2) を 2回使った)} \\
 &> 1 && \\
 &< \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 1 - 1 \\
 &= \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 2 \quad \square
 \end{aligned}$$