自治医科大学

2015年 医学部 第23問

$\boxed{23}$ 3次方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$（b, c, d は実数）は，すべて異なる3つの実数解 α, β, γ（$\alpha<\beta<\gamma$）をもつとする．$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9$, $\alpha\beta\gamma=k$ であるとき，k のとりうる値の範囲は，$-p<k<0$（p は正の実数）となる．p の値を求めよ．

解と係数の関係より．

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-b & \therefore\ b=-3 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c & \cdots ① \\ \alpha\beta\gamma=-d & \therefore\ d=-k \end{cases}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$=9-2c \quad (\because ①より)$$

$$\therefore\ c=0$$

このとき．$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ とおくと，

$$f(x)=x^3-3x^2-k$$

$$\therefore\ f'(x)=3x^2-6x$$

$$=3x(x-2)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-k$	$\searrow$	$-4-k$	$\nearrow$

$\therefore$ 3つの異なる実数解をもつのは．

$f(0)\cdot f(2)<0$ のとき．　$\therefore\ -k(-4-k)<0$

$$\therefore\ k(k+4)<0$$

$$\therefore\ -4<k<0 \quad \therefore\ \underline{p=4}$$