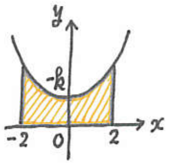
2013年 歯・薬学部（前期） 第4問

$\boxed{4}$ $y=|x^2-k|$ と，x 軸および，直線 $x=2$，$x=-2$ で囲まれた領域の面積 S を求めなさい．

(i) $k \leqq 0$ のとき．



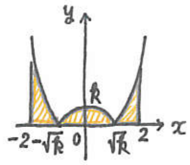
$\therefore S=\int_{-2}^{2} x^2-k\,dx$

$=2\int_0^2 x^2-k\,dx$

$=2\left[\frac{x^3}{3}-kx\right]_0^2$

$=-4k+\frac{16}{3}$

(ii) $0<k\leqq 4$ のとき．



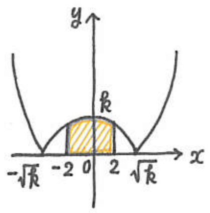
$\therefore S=2\left\{\int_0^{\sqrt{k}} -x^2+k\,dx+\int_{\sqrt{k}}^{2} x^2-k\,dx\right\}$

$=2\left\{\left[-\frac{x^3}{3}+kx\right]_0^{\sqrt{k}}+\left[\frac{x^3}{3}-kx\right]_{\sqrt{k}}^{2}\right\}$

$=2\left(-\frac{1}{3}k\sqrt{k}+k\sqrt{k}+\frac{8}{3}-2k-\frac{1}{3}k\sqrt{k}+k\sqrt{k}\right)$

$=\frac{8}{3}k\sqrt{k}-4k+\frac{16}{3}$

(iii) $k>4$ のとき．



$S=2\int_0^2 -x^2+k\,dx$

$=2\left[-\frac{x^3}{3}+kx\right]_0^2$

$=2\left(-\frac{8}{3}+2k\right)$

$=4k-\frac{16}{3}$

(i)～(iii) より．

$$S=\begin{cases} -4k+\frac{16}{3} & (k\leqq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{8}{3}k\sqrt{k}-4k+\frac{16}{3} & (0<k\leqq 4 \text{ のとき}) \\ 4k-\frac{16}{3} & (k>4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

//