0002113726887999

鹿児島大学

2015年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} - a_n = \frac{n\left\{1 + (-1)^{n+1}\right\}}{2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定まるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 をそれぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n = a_{2n-1}, \quad c_n = a_{2n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定めるとき，一般項 b_n，c_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} (-1)^n a_n$ を求めよ．

(1) $a_2 - a_1 = \dfrac{1\cdot 2}{2} = 1 \qquad \therefore\ a_2 = 1$

$a_3 - a_2 = \dfrac{2\cdot 0}{2} = 0 \qquad \therefore\ a_3 = 1$

$a_4 - a_3 = \dfrac{3\cdot 2}{2} = 3 \qquad \therefore\ a_4 = 4$

$a_5 - a_4 = \dfrac{4\cdot 0}{2} = 0 \qquad \therefore\ a_5 = 4$

以上より，$\underline{a_2 = a_3 = 1,\ a_4 = a_5 = 4}$ //

(2) $a_{2n+1} - a_{2n} = \dfrac{2n\{1+(-1)^{2n+1}\}}{2} = 0 \quad \cdots ①$

$a_{2n} - a_{2n-1} = \dfrac{(2n-1)\{1+(-1)^{2n}\}}{2} = 2n-1 \quad \cdots ②$

① + ② より，$b_{n+1} - b_n = 2n-1$

$\therefore$ $n \geqq 2$ のとき，$b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$= n(n-1) - (n-1)$

$= (n-1)^2$ これは $n=1$ のときも成り立つ $\qquad \therefore\ \underline{b_n = (n-1)^2}$ //

① より，$\underline{c_n = b_{n+1} = n^2}$ //

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50}(-1)^n a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{25}(-1)^{2n-1}a_{2n-1}}_{\text{奇数のときの和}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{25}(-1)^{2n}a_{2n}}_{\text{偶数のときの和}}$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{25} -b_n + \sum_{n=1}^{25} c_n$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{25}(c_n - b_n)$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{25}(2n-1)$

$= 25\cdot 26 - 25 \quad \leftarrow 25^2$

$= \underline{625}$ //