静岡大学

2016年 理（物・化）・工・情報 第2問

$\boxed{2}$ c は $c > 1$ を満たす定数とする．数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める．

$$a_1 = 1, \quad c(a_{n+1})^n = (a_n)^{n+1}, \quad a_n > 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の各問に答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{1}{n}\log a_n$ とする（$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）．ただし，log は自然対数を表す．このとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\log a_k$ をそれぞれ求めよ．

(1) $c(a_{n+1})^n = (a_n)^{n+1}$ の両辺，対数をとって，$\log c + n\log a_{n+1} = (n+1)\log a_n$

両辺 $n(n+1)$ で割ると，$\dfrac{\log c}{n(n+1)} + \dfrac{\log a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\log a_n}{n}$

$\therefore\ b_{n+1} - b_n = -\dfrac{\log c}{n(n+1)}$

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\dfrac{\log c}{k(k+1)}\right\}$

$b_1 = \log a_1 = 0$ であるから，$b_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{\log c}{k} - \dfrac{\log c}{k+1}\right) = -\log c + \dfrac{\log c}{n} = \dfrac{(1-n)\log c}{n}$ $(n \geqq 2)$

これは $n=1$ のとき，$b_1 = 0$ となり，成り立つ．よって，$\underline{b_n = \dfrac{(1-n)\log c}{n}}$ //

(2) (1)より，

$\dfrac{1}{n}\log a_n = \dfrac{(1-n)\log c}{n}$ よって，$\underline{a_n = c^{1-n}}$ //

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} c^{1-k}$ 初項1，公比 $\dfrac{1}{c}$ の等比数列の和

$= \dfrac{1-\left(\frac{1}{c}\right)^n}{1-\frac{1}{c}}$

$= \underline{\dfrac{c(1-c^{-n})}{c-1}}$ //

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\log a_k = \log c\cdot\sum_{k=1}^{n} k(1-k)$

$= \log c\cdot\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1) - \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$

$= \underline{-\dfrac{1}{3}\log c\cdot(n-1)n(n+1)}$ //